Done

Cat by the

مخروطی تراشیں

سلسلۂ نصابات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

مخروطی تراشیں

تصنیف

چارلس اسمتھ ایم۔اے

ترجمہ

محمد نذیرالدین ایم۔اے (عثمانیہ)
رکن سررشتۂ تالیف و ترجمہ جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی

سنہ ۱۳۶۰ھ سنہ ۱۳۵۰ف سنہ ۱۹۴۱ء

دارالطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب میکملن کمپنی کی اجازت سے جن کو حقِ اشاعت
حاصل ہے اُردو میں ترجمہ کر کے
طبع و شائع کی گئی ہے

فہرست مضامین

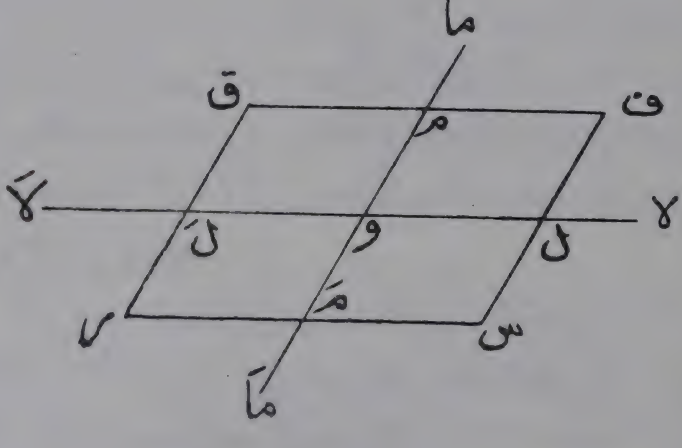
مخروطی تراشیں

(۱)

پہلا باب

محدد

۱- اگر ایک مستوی میں دو ثابت خطوطِ مستقیم لا و لاَ ، ما و ماَ لیے جائیں اور مستوی کے کسی نقطۂ ف میں سے دو خطوطِ مستقیم ف م، ف ل علی الترتیب لا و لاَ، ما و ماَ کے متوازی کھینچے جائیں جہاں ف ل اور ف م، لا و لاَ اور ما و ماَ سے علی الترتیب ل اور م پر ملتے ہیں تو نقطہ ف کا محل معلوم ہو سکتا ہے جبکہ خطوط ف م اور ف ل کے



طول دیے گئے ہوں۔ کیونکہ ہمیں صرف و ل ، و م کو علی الترتیب معلومہ خطوط م ف ، ل ف کے مساوی لینا اور متوازی الاضلاع ل و م ف کی تکمیل کرنا ہوگا۔

یہ طول م ف اور ل ف ، یا و ل اور و م ، جو اس طرح نقطہ ف کے محل کو خطوط و لا ، و ما کے حوالہ سے مقرر کرتے ہیں نقطہ ف کے **محدد** بحوالہ محاور و لا ، و ما کہلاتے ہیں۔ محوروں کا نقطۂ تقاطع **مبدا** کہلاتا ہے۔

جب محوروں کا درمیانی زاویہ زاویۂ قائمہ ہوتا ہے تو محوروں کو **قائمہ محاور** کہا جاتا ہے لیکن جب یہ درمیانی زاویہ زاویۂ قائمہ نہیں ہوتا تو محوروں کو **مائل محاور** کہتے ہیں۔ (۲)

و ل کو بالعموم نقطہ ف کا **فصلہ** اور ل ف کو **معین** کہتے ہیں۔

وہ محدد جس کی پیمایش محور و لا پر عمل میں آتی ہے حرف لا سے تعبیر کیا جاتا ہے اور وہ محدد جس کی پیمایش محور و ما پر کی جاتی ہے حرف ما سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اگر ، شکل میں ، و ل طول کی ا اکائیاں اور و م ، ب اکائیاں ہوں تو نقطہ ف پر لا = ا اور ما = ب اور اس لیے اس نقطہ کو اکثر اختصاراً نقطہ (ا ، ب) کہا جاتا ہے۔

۲۔ فرض کرو کہ و مَ کو طول میں و م کے مساوی اور و لَ کو و ل کے مساوی لیا گیا ہے اور مَ ، لَ میں سے محوروں کے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں ، (دیکھو شکل دفعہ ۱) ۔ اب تین نقطوں ق ، ر ، س کے محدد مقدار میں ف کے محددوں کے مساوی ہونگے۔ پس خطوط و ل ، ل ف کے طولوں کا جان لینا ہی کافی نہیں ہے بلکہ وہ سمتیں بھی معلوم ہونی چاہییں جن میں ان کی پیمایش کی گئی ہے۔

اگر ایک سمت میں پیمایش کردہ خطوں کو مثبت لیا جائے تو سمت مخالف میں پیمایش کردہ خطوں کو منفی لینا چاہیے۔ ہم اُن خطوں کو جن کی پیمایش و لا یا و ما کی سمتوں میں کی گئی ہو مثبت سمجھینگے اور اس لیے وہ خطوط جن کی پیمایش و لَا یا و مَا کی سمتوں میں کی گئی ہو منفی متصور ہونے چاہییں۔

اب ہم نقاط ف، ق، سا، س کے محددوں میں تمیز کر سکتے ہیں۔
سا کے محدد و لَ، لَ سا ہیں اور یہ دونوں منفی سمت میں پیمایش کیے گئے
ہیں، اِس لیے اگر ف کے محدد ا، ب ہوں تو سا کے محدد -ا، -ب ہونگے۔
س کے محدد ا، -ب اور ق کے -ا، ب ہونگے۔

چنانچہ ف، ق، سا، س علی الترتیب نقاط (ا، ب)، (-ا، ب)،
(-ا، -ب)، اور (ا، -ب) ہیں۔ نیز ل، م، لَ، مَ نقاط (ا، ۰)، (۰، ب)،
(-ا، ۰)، (۰، -ب) ہیں۔

جب کسی نقطہ کے محددوں کو معلومہ سمجھا جاتا ہے تو انہیں بالعموم حروف تہجی
کے ابتدائی حرفوں سے تعبیر کیا جاتا ہے مثلاً (ا، ب)، (ج، د)، وغیرہ لیکن
جب ایک سے زیادہ نقطے ہوں تو ترقیم (لاَ، مَا)، (لاً، ماً) وغیرہ یا (لا۱، ما۱)،
(لا۲، ما۲) وغیرہ بالعموم استعمال کی جاتی ہے۔

(۳) ۳ — اِس کو بڑی احتیاط سے ذہن نشین رکھنا چاہیے کہ کسی خط کا
مثبت یا منفی ہونا اُس سمت پر منحصر ہے جس میں وہ کھینچا گیا ہے اور وہ
مبداء کے محل پر منحصر نہیں ہے مثلاً دفعہ ۱ کی شکل میں خط لَ و منفی ہے
کیونکہ سمت لَ تا و اُس سمت کے مخالف ہے جو و تا لا ہے۔

اگر کوئی دو نقطے ک، ل لیے جائیں اور خط ک ل میں ایک
نقطہ و لے کر فاصلوں و ک، و ل کو علی الترتیب ا اور ب سے تعبیر کیا جائے
تو فاصلہ ک ل کو ک و + و ل یا -و ک + و ل ہونا چاہیے یعنے
-ا + ب اور یہ درست ہوگا خواہ نقطہ و خط ک ل پر کہیں واقع ہو۔

اگر و ا = -۳، و ب = ۴ تو

ا ب = ا و + و ب = - و ا + و ب = -(-۳) + ۴ = ۷

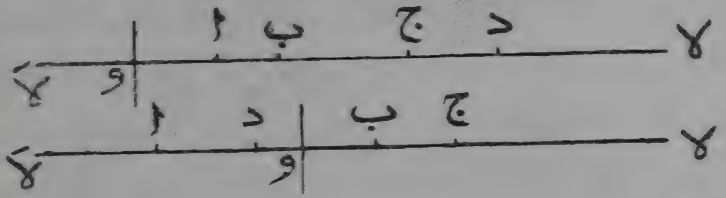
اگر و ا = ۳، و ب = -۴ تو ا ب = -۳ + (-۴) = -۷

طالب علم اس کو ایک شکل کی مدد سے واضح کرے۔

مثال ۱- اگر ایک خطِ مستقیم میں کوئی چار نقطے ا، ب، ج، د ہوں تو

ا ب × ج د + ب ج × ا د = ا ج × ب د

اُس خطِ مستقیم کو جس پر یہ نقطے واقع ہیں لا کا محور فرض کرو اور اس پر کسی نقطہ و کو مبداء قرار دو۔ اب اگر و ا = لا$_1$، و ب = لا$_2$، و ج = لا$_3$ اور و د = لا$_4$ تو



اب = او + وب = - وا + وب = - لا$_1$ + لا$_2$،

ج د = ج و + و د = - وج + و د = - لا$_3$ + لا$_4$،

نیز ب ج = - لا$_2$ + لا$_3$، ا د = - لا$_1$ + لا$_4$،

ا ج = - لا$_1$ + لا$_3$، ب د = - لا$_2$ + لا$_4$

اس لیے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ لا$_1$، لا$_2$، لا$_3$، لا$_4$ کی تمام قیمتوں کے لیے

(- لا$_1$ + لا$_2$) (- لا$_3$ + لا$_4$) + (- لا$_2$ + لا$_3$) (- لا$_1$ + لا$_4$) = (- لا$_1$ + لا$_3$) (- لا$_2$ + لا$_4$)

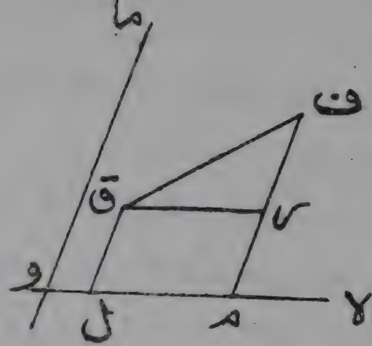
درست ہے۔ خطوط وحدانی دور کرنے سے یہ واضح ہے۔

مثال ۲— ایک خطِ مستقیم پر کوئی تین نقطے ا، ب، ج ہیں اور ف کوئی اور نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ

ف ا^2 × ب ج + ف ب^2 × ج ا + ف ج^2 × اب + ب ج × ج ا × اب = ۰

(۴) ۴— دو نقطوں کے درمیانی فاصلہ کو اِن کے محددوں کی رقوم میں بیان کرنا۔

فرض کرو کہ ف، نقطہ (لاَ، ماَ) اور ق، نقطہ (لاً، ماً) ہے اور فرض کرو کہ محاور زاویہ سہ پر مائل ہیں۔



ف م اور ق ل کو و ما کے متوازی اور ق ر کو و لا کے متوازی کھینچو حسب شکل۔

تب و ل = لاً، ل ق = ماً، و م = لاَ، م ف = ماَ

علم مثلث سے

ف ق^2 = ق ر^2 + ر ف^2 - ۲ ق ر × ر ف جم ق ر ف

لیکن ق ر = ل م = و م - و ل = لاَ - لاً

ر ف = م ف - م ر = م ف - ل ق = ماَ - ماً

اور زاویہ ق ر ف = زاویہ و م ف = π - زاویہ لا و ما = π - سہ

اِس لیے ف ق^2 = (لاَ - لاً)^2 + (ماَ - ماً)^2 + ۲ (لاَ - لاً) (ماَ - ماً). جم سہ

یا ف ق = ± $\sqrt{\text{(لاَ - لاً)}^2 + \text{(ماَ - ماً)}^2 + ۲ \text{(لاَ - لاً) (ماَ - ماً). جم سہ}}$

اگر محاور علی القوائم ہوں تو

ف ق = ± $\sqrt{\text{(لاَ - لاً)}^2 + \text{(ماَ - ماً)}^2}$

ہم مبداء سے ف کے فاصلہ کو راست معلوم کر سکتے ہیں یا اس کو اوپر کے ضابطہ میں لاً = ۰، ماً = ۰ رکھنے سے معلوم کیا جا سکتا ہے چنانچہ

$$\text{وف} = \pm\sqrt{\text{لاً}^2 + \text{ماً}^2 + 2\,\text{لاً ماً جم سہ}}$$

یا محاور قائم ہوں تو

$$\text{وف} = \pm\sqrt{\text{لاً}^2 + \text{ماً}^2}$$

۵) سوائے اُن خطوطِ مستقیم کے جو محوروں کے متوازی ہوں دیگر خطوں کی سمت کے متعلق کوئی قرار داد اختیار نہیں کی گئی ہے کہ کونسی سمت کو مثبت سمجھا جائے۔ اِس لیے ہم ف ق یا ق ف میں سے کسی ایک کو مثبت فرض کر سکتے ہیں۔ لیکن اگر ایک ہی خطِ مستقیم میں تین یا زیادہ نقطے ف، ق، ر، . . . ہوں تو ایک ہی سمت کو مثبت سمجھنا چاہیے تاکہ تمام صورتوں میں

$$\text{ف ق} + \text{ق ر} = \text{ف ر}$$

حسب ذیل مثالوں میں محاور قائم ہیں :-

مثال ۱- ایک شکل میں نقطہ لا = ۱، ما = ۲ اور نقطہ لا = -۳، ما = -۱ کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اِن کے درمیان فاصلہ ۵ ہے۔

مثال ۲- اُن خطوں کے طول معلوم کرو جو نقطوں کے حسب ذیل جوڑوں کو ملاتے ہیں:

(۱) (۱، -۱) اور (-۱، ۱)، (۲) (وَ، -و) اور (-ب، ب)

(۳) (۳، ۴) اور (۱، -۱)

مثال ۳- ثابت کرو کہ تین نقطے (۱، ۱)، (-۱، -۱) اور (-$\sqrt{3}$، $\sqrt{3}$)، ایک متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

مثال ۴- ثابت کرو کہ چار نقطے (۰، ۱-)، (-۲، ۳)، (۶، ۷) اور (۸، ۳)، ایک مستطیل کے راس ہیں۔

مثال ۵۔ ایک ہی شکل میں نقطوں (۰،-۱)، (۲،۱)، (۳،۰) اور (۱،-۲) کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ وہ ایک مربع کے راس ہیں۔
یہی بات نقطوں (۲،۱)، (۴،۳)، (۲،۵) اور (۰،۳) کی صورت میں بھی ثابت کرو۔

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ چار نقطے (۲،۱)، (۵،۴)، (۴،۷) اور (۱،۴) ایک متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

مثال ۷۔ اگر نقطہ (لا، ما)، دو نقطوں (۳،۴) اور (۱،-۲) سے مساوی فاصلے پر ہو تو ثابت کرو کہ لا + ۳ ما = ۵

[کیونکہ (لا-۳)^۲ + (ما-۴)^۲ = (لا-۱)^۲ + (ما+۲)^۲
اور اس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔]

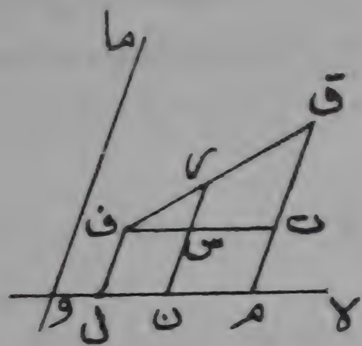
مثال ۸۔ ثابت کرو کہ نقطہ (۷،۱۰)، تین نقطوں (-۱۰،-۹)، (۳۲،۵)، اور (۱۸،۳۳) سے مساوی فاصلے پر ہے۔

مثال ۹۔ وہ نقطہ معلوم کرو جو نقطوں (۰،۰)، (۳۲،۱۰) اور (۴۲،۰) سے مساوی فاصلے پر ہو۔ جواب: (۲۱،-۱۱)

مثال ۱۰۔ اس مثلث کے اضلاع کے طول معلوم کرو جس کے راس (۱۰،۸)، (۴،۱۳) اور (۴،۸۰۸) ہیں۔
ثابت کرو کہ نقطہ (۷،۶۵، ۴،۲۱) ہر راس سے فاصلہ ۶،۵ پر ہے۔
جواب: اضلاع ۱۳، ۱۲، ۵ ہیں۔

(۶) ۵۔ اس نقطہ کے محدد معلوم کرنا جو دو دیے ہوئے نقطوں کو ملانے والے خطِ مستقیم کی تقسیم ایک معلومہ نسبت میں کرے۔

فرض کرو کہ ف کے محدد $لا_۱$، $ما_۱$ اور ق کے محدد $لا_۲$، $ما_۲$ ہیں اور فرض کرو کہ س (لا، ما) وہ نقطہ ہے جو ف ق کو نسبت $ک_۱ : ک_۲$ میں تقسیم کرتا ہے۔



ف ل، ر ن، ق م کو محور ما کے متوازی اور ف س ت کو محور لا کے متوازی کھینچو حسب شکل۔

تب ل ن : ن م = ف س : س ت = ف ر : ر ق = $\text{ک}_1 : \text{ک}_2$

$\therefore$ $\text{ک}_2 \times \text{ل ن} - \text{ک}_1 \times \text{ن م} = 0$

یا $\text{ک}_2 (\text{لا} - \text{لا}_1) - \text{ک}_1 (\text{لا}_2 - \text{لا}) = 0$

$$\therefore \quad \text{لا} = \frac{\text{ک}_2 \text{لا}_1 + \text{ک}_1 \text{لا}_2}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2}$$

اسی طرح
$$\text{ما} = \frac{\text{ک}_2 \text{ما}_1 + \text{ک}_1 \text{ما}_2}{\text{ک}_1 + \text{ک}_2}$$

سب سے زیادہ مفید صورت وہ ہے جب کہ خط ف ق کی تنصیف کی گئی ہو چنانچہ نقطۂ تنصیف کے محدد

$$\tfrac{1}{2}(\text{لا}_1 + \text{لا}_2)، \tfrac{1}{2}(\text{ما}_1 + \text{ما}_2)$$

ہیں۔

اگر خط نسبت $\text{ک}_۱ : -\text{ک}_۲$ میں خارجاً منقطع ہو تو

$$\text{ل ن} : \text{ن م} = \text{ک}_۱ : (-\text{ک}_۲)$$

اور اس لیے

$$\text{لا} = \frac{\text{ک}_۱ \text{لا}_۲ - \text{ک}_۲ \text{لا}_۱}{\text{ک}_۱ - \text{ک}_۲} ،\quad \text{ما} = \frac{\text{ک}_۱ \text{ما}_۲ - \text{ک}_۲ \text{ما}_۱}{\text{ک}_۱ - \text{ک}_۲}$$

(۷) مندرجۂ بالا نتیجے درست رہتے ہیں خواہ محددوں کے محوروں کے درمیان کوئی زاویہ ہو۔ لیکن بہت سی صورتوں میں ضابطے ذرا پیچیدہ ہو جاتے ہیں جب کہ محاور علی القوائم نہ ہوں۔

ہم آیندہ محوروں کو تمام صورتوں میں علی القوائم سمجھینگے اِلّا آنکہ اس کے خلاف بیان کیا گیا ہو۔

مثال ۱۔ اُس خط کا وسطی نقطہ معلوم کرو جو نقطوں (۳، ۱)، (-۵، ۷) کو ملاتا ہے۔

$$\text{لا} = \tfrac{1}{2}\{۳ + (-۵)\} = -۱ ،\quad \text{ما} = \tfrac{1}{2}(۱ + ۷) = ۴$$

مثال ۲— وہ نقطہ معلوم کرو جو نقطوں (۲، ۳) اور (۵، -۳) کو ملانے والے خط کی تقسیم نسبت ۱ : ۲ میں کرتا ہے—

$$\text{لا} = \frac{۱\times۵ + ۲\times۲}{۱+۲} = ۳ ،\quad \text{ما} = \frac{۱\times(-۳) + ۲\times۳}{۱+۲} = ۱$$

مثال ۳— نقاط ا، ب، ج علی الترتیب (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲) اور (لا۳، ما۳) ہیں۔ ب ج، ج ا، ا ب کے نقاطِ وسطی علی الترتیب د، ع، ف ہیں۔ نقطہ گ کے محدد معلوم کرو جو د ا کو اس طرح تقسیم کرتا ہے کہ ۲ د گ = گ ا

د کے محدد

$$\text{لا} = \tfrac{1}{2}(\text{لا}_۲ + \text{لا}_۳) ،\quad \text{ما} = \tfrac{1}{2}(\text{ما}_۲ + \text{ما}_۳)$$

ہیں اور اس لیے گ کے محدد

$$لا = \frac{۱ \times لا_۱ + ۲ \times \frac{۱}{۲}(لا_۲ + لا_۳)}{۲ + ۱} = \frac{۱}{۳}(لا_۱ + لا_۲ + لا_۳)$$

$$ما = \frac{۱ \times ما_۱ + ۲ \times \frac{۱}{۲}(ما_۲ + ما_۳)}{۲ + ۱} = \frac{۱}{۳}(ما_۱ + ما_۲ + ما_۳)$$

ہیں۔

اِس نتیجہ کے تشاکل سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ نقطہ گ، خطوط ع ب اور ف ج پر بھی واقع ہے اور نیز یہ کہ ۲ ع گ = گ ب اور ۲ ف گ = گ ج

کسی مثلث کے خطوطِ وسطی کے نقطہ تقاطع کو مثلث کا مرکزِ ہندسی کہتے ہیں اور ہم اوپر کی مثال سے یہ دیکھتے ہیں کہ اگر ایک مثلث کے راس $(لا_۱، ما_۱)$، $(لا_۲، ما_۲)$ ہوں تو اِس کے مرکزِ ہندسی کے محدد

$$\frac{۱}{۳}(لا_۱ + لا_۲ + لا_۳)،\ \frac{۱}{۳}(ما_۱ + ما_۲ + ما_۳)$$

ہیں۔

مثال ۴ — اُس مثلث کا مرکزِ ہندسی معلوم کرو جس کے راس علی الترتیب (-۴، ۶)، (۲، -۲) اور (۲، ۵) ہیں۔ جواب: (۰، ۳)

مثال ۵ — اُس مثلث کا مرکزِ ہندسی معلوم کرو جس کے راس علی الترتیب (۳، -۵)، (-۷، ۴) اور (۱۰، -۲) ہیں۔ جواب: (۲، -۱)

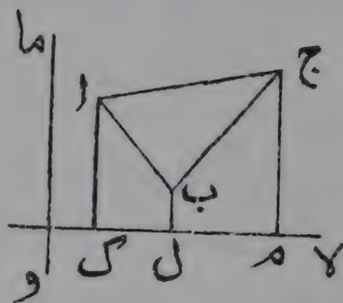
مثال ۶ — وہ نقطہ معلوم کرو جو (۵، -۳) اور (۳، -۵) کو ملانے والے خط کی تقسیم نسبت ۳ : ۵ میں کرتا ہے۔ جواب $\left(\frac{۱۷}{۴}، -\frac{۱۵}{۴}\right)$

مثال ۷ — وہ نقطہ معلوم کرو جو (۲، ۱) اور (۳، ۵) کو ملانے والے خط کی تقسیم خارجی طور پر نسبت ۲ : -۳ میں کرتا ہے — جواب: (۰، -۷)

۹ — مثلث کے رقبہ کو اس کے راسوں کے محددوں کی رقوم میں بیان کرنا۔

فرض کرو کہ راسوں ا، ب، ج کے محدد علی الترتیب $(لا_۱، ما_۱)$

(لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳) ہیں۔



خطوط اک، ب ل، اور ج م کو محور ما کے متوازی کھینچو حسب شکل۔

∆ ا ب ج = م ج ا ک - ک ا ب ل - ل ب ج م

اب   م ج ا ک = ∆ م ج ا + ∆ ا ک م

= ½ ک م × م ج + ½ ک م × ک ا

= ½ (لا۳ - لا۱) (ما۳ + ما۱)

اسی طرح   ک ا ب ل = ½ (لا۲ - لا۱) (ما۱ + ما۲)

اور   ل ب ج م = ½ (لا۳ - لا۲) (ما۲ + ما۳)

∴   ∆ ا ب ج = ½ {(ما۳ + ما۱) (لا۳ - لا۱) + (ما۱ + ما۲) (لا۱ - لا۲)
+ (ما۲ + ما۳) (لا۲ - لا۳)}

یا اُن رقموں کو ترک کرنے سے جو ایک دوسرے کو خارج کرتی ہیں

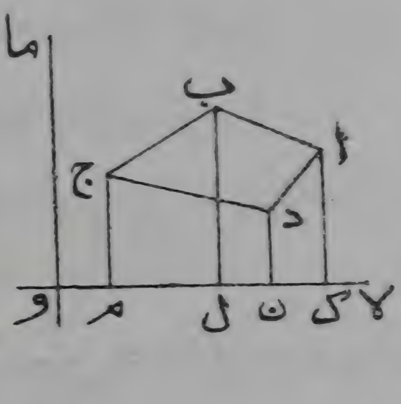
∆ ا ب ج = ½ {لا۱ ما۲ - لا۲ ما۱ + لا۲ ما۳ - لا۳ ما۲ + لا۳ ما۱ - لا۱ ما۳}

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & 1 \\ \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

مثلث کے رقبہ کا یہ جملہ مثبت ہوگا اگر راس ایسی ترتیب میں ہوں کہ مثلث کے گرد چلنے میں رقبہ ہمیشہ بائیں جانب رہے یا اگر گھیرے ا ب ج ا کو طے کرنے کی ترتیب خلاف سمت ساعت ہو۔ جب کبھی راسوں کے محددوں کے اندراج سے رقبہ کے لیے منفی جملہ حاصل ہو تو مثلث کے گرد چلنے کی ترتیب کو اُلٹ دیا جائے۔

۷۔— ذوار بعۃ الاضلاع کے رقبے کو اس کے راسوں کے محددوں کی رقوم میں بیان کرنا جبکہ راس ترتیب وار دیے گئے ہوں۔

فرض کرو کہ راس ترتیب وار ا، ب، ج، د ہیں اور ان کے محدد علی الترتیب (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳) اور (لا۴، ما۴) ہیں۔



اک، ب ل، ج م، د ن کو محور ما کے متوازی کھینچو حسبِ شکل۔

اب رقبہ ا ب ج د

$$= ک\,ا\,ب\,ل + ل\,ب\,ج\,م - م\,ج\,د\,ن - ن\,د\,ا\,ک$$

اور گزشتہ دفعہ کی طرح

$$ک\,ا\,ب\,ل = \frac{1}{2}(ہا_1 + ہا_2)(لا_1 - لا_2)$$

$$ل\,ب\,ج\,م = \frac{1}{2}(ہا_2 + ہا_3)(لا_2 - لا_3)$$

$$م\,ج\,د\,ن = \frac{1}{2}(ہا_3 + ہا_4)(لا_3 - لا_4)$$

$$ن\,د\,ا\,ک = \frac{1}{2}(ہا_4 + ہا_1)(لا_1 - لا_4)$$

پس $$ا\,ب\,ج\,د = \frac{1}{2}\{(ہا_1 + ہا_2)(لا_1 - لا_2) + (ہا_2 + ہا_3)(لا_2 - لا_3) + (ہا_3 + ہا_4)(لا_3 - لا_4) + (ہا_4 + ہا_1)(لا_4 - لا_1)\}$$

یا اُن رقموں کو ترک کرنے سے جو ایک دوسرے کو خارج کرتی ہیں۔

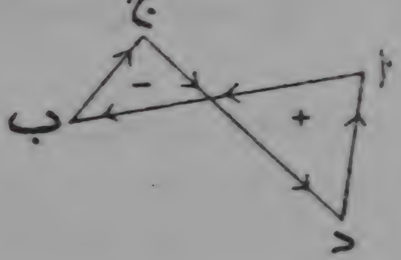
$$ا\,ب\,ج\,د = \frac{1}{2}\{لا_1ہا_2 - لا_2ہا_1 + لا_2ہا_3 - لا_3ہا_2 + لا_3ہا_4 - لا_4ہا_3 + لا_4ہا_1 - لا_1ہا_4\}$$

کسی کثیر الاضلاع کے رقبہ کو بھی اِسی طرح معلوم کیا جاسکتا ہے۔

[ایک دوسرا طریقہ دفعہ ۱۲ میں بیان کیا گیا ہے]

اوپر کا ضابطہ جو $لا_1ہا_2 - لا_2ہا_1$ سے شروع ہوتا ہے اور دائری ترتیب میں $لا_2ہا_3 - لا_3ہا_2$ وغیرہ میں بدلتا جاتا ہے **مثبت** ہوگا اگر راسوں کو شکل کے احاطہ کے گرد خلاف سمت ساعت ترتیب میں لیا گیا ہو اور **منفی** ہوگا اگر یہ ترتیب الٹی ہو۔

لیکن یہ ذہن نشین رہے کہ چار نقطوں کو ایک سے زیادہ طریقوں سے ملایا جاسکتا ہے اور شکل ذیل کی صورت میں ضابطہ سے اُن مثلثوں کے حقیقی رقبوں کا (۱۰) فرق حاصل ہوگا جو علی الترتیب مثبت (+) اور منفی (−) علامتوں سے موتسم ہیں۔



مثال ۱ — اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس (۲، ۱)، (۴، ۳) اور (۲، ۵) ہیں۔ نیز اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس (۴، -۵)، (۵، -۶) اور (۳، ۱) ہیں۔

جواب: ۴، $\frac{۵}{۲}$

مثال ۲ — اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس ا، ب، ج علی الترتیب (۲، ۳)، (۴، ۵) اور (۶، ۲) ہیں۔

جواب: -۵

[منفی علامت اِس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ ا ب ج ا گردش کی اُس ترتیب میں ہے جو موافق سمت ساعت ہے اور یہ نقطوں کو مرتسم کرنے سے معلوم ہوسکتا ہے۔ اکثر صورتوں میں رقبہ کی صرف مطلق قیمت مطلوب ہوگی۔]

مثال ۳ — ا، ب، ج علی الترتیب نقطے (-۱، ۵)، (۳، ۱)، (۵، ۷) ہیں اور ب ج، ج ا، ا ب کے نقاطِ وسطی د، ع، ف ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\triangle \text{ا ب ج} = ۴ \triangle \text{د ع ف}$$

مثال ۴ — اُس ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس ترتیب وار (۱، ۲)، (۶، ۲)، (۵، ۳) اور (۳، ۴) ہیں۔
نیز اُس ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ جس کے راس (۲، ۲)، (-۲، ۳)، (-۳، -۳) اور (۱، -۲) ہیں۔

جواب: $\frac{۱۱}{۲}$، ۲۰

مثال ۵ — اُس ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ معلوم کرو جس کے راس ا، ب، ج، د ترتیب وار (-۴، ۲)، (۳، -۵)، (۱، ۷) اور (۶، -۲) ہیں۔

جواب: صفر

نقطوں کو مرتسم کرو اور نتیجہ کو ظاہر کرنے کے لیے ا ب ج د ا کھینچو۔
رقبہ معلوم کرو جب کہ نقطوں کو ترتیب ا، ب، د، ج میں لیا گیا ہو۔

جواب: ۵۶

مثال ۶ — نقطے ا، ب، ج، د علی الترتیب (۲، ۴)، (۳، ۲)، (۸، ۴) اور (۷، ۶) ہیں۔ ا ب ج د کا رقبہ معلوم کرو۔ نیز نقطوں کو ترتیب ا، ج، ب، د میں اور ترتیب ا، ب، د، ج میں لے کر ثابت کرو کہ ا ب، ج د کے متوازی ہے اور ب ج، د ا کے متوازی ہے۔

جواب: ۱۲

۸ — اگر ایک منحنی کی تعریف ایک ایسی ہندسی خاصیت کی بنا پر کی گئی ہو جو اس کے تمام نقطوں میں مشترک ہو تو کوئی نہ کوئی جبری رشتہ موجود ہو گا (۱۱)
جو منحنی کے تمام نقطوں کے محددوں سے پورا ہو گا اور ان نقطوں کے علاوہ دیگر نقطوں سے پورا نہیں ہو گا۔ اس جبری رشتہ کو **منحنی کی مساوات** کہتے ہیں۔

اس کے برعکس وہ تمام نقطے جو ایک معلومہ جبری مساوات کو پورا کرتے ہیں ایک منحنی پر واقع ہوتے ہیں جس کو اس مساوات کا **طریق** کہتے ہیں۔

مثلاً اگر ایک خطِ مستقیم کو محور وما کے متوازی اس سے فاصلہ ا پر کھینچا جائے تو اس خط پر کے نقطوں کے فصلے سب کے سب مستقل مقدار ا کے مساوی ہونگے اور کسی اور نقطہ کا فصلہ ا کے مساوی نہیں ہو گا۔

پس $\text{لا} = \text{ا}$ اس خط کی مساوات ہو گی۔

اس کے برعکس وہ خط جو محور ما کے متوازی اس سے فاصلہ ا پر کھینچا گیا ہو مساوات $\text{لا} = \text{ا}$ کا **طریق** ہے۔

نیز اگر ایک دائرہ پر کے کسی نقطہ ف کے محدد لا، ما ہوں اور اس کا مرکز مبدا و پر ہو اور اس کا نصف قطر ج ہو تو فاصلہ و ف کا مربع $\text{لا}^2 + \text{ما}^2$ ہو گا [دفعہ ۴]۔ لیکن و ف دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے۔ اس لیے دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدد لا، ما رشتہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ج}^2$ کو پورا کرتے ہیں یعنی دائرہ کی مساوات

$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ج}^2$ ہے۔

اِس کے برعکس مساوات $لا^2 + ما^2 = ج^2$ کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز مبدا ہے اور جس کا نصف قطر ج کے مساوی ہے۔

اُس منحنی کا تقریبی خاکہ جس کو ایک جبری مساوات سے تعبیر کیا گیا ہو اس طرح کھینچا جا سکتا ہے کہ لا یا ما کو قیمتوں کا ایک سلسلہ دیا جائے اور اس کے جواب میں ما یا لا کی قیمتیں محسوب کی جائیں اور پھر مربع دار کاغذ پر نقطوں کا وہ سلسلہ مرتسم کیا جائے جن کے محدد اس طریقہ پر حاصل ہوئے ہوں جبر و مقابلہ میں بہت سا وقت ایسی غیر دلچسپ مشق پر صرف کیا جاتا ہے حالانکہ یہ کچھ زیادہ مفید بھی نہیں۔

علم ہندسہ تحلیلی میں وہ مساوات معلوم کی جاتی ہے جو اُن تمام نقطوں کے محددوں سے پوری ہوتی ہے جو ایک منحنی پر واقع ہوں جس کی تعریف کسی ہندسی خاصیت کی بناء پر کی گئی ہو۔ نیز منحنی کا محل اور اس کے خواص اُس مساوات سے اخذ کیے جاتے ہیں جو منحنی پر کے تمام نقطوں کے محددوں سے پوری ہوتی ہے۔

ایک مساوات کو ن ویں درجہ کی مساوات کہتے ہیں جب اس کو اس طرح تحویل کرنے کے بعد کہ متغیروں کے قوت نما چھوٹے سے چھوٹے ممکن صحیح اعداد ہوں اُس میں بڑے سے بڑے ابعاد کی رقم (یا ارقام) ن ابعاد کی ہو۔

مثلاً مساواتیں $ا\,لا^2 + ب\,لا + ج = ۰$، $لا^2 + لا\,\overline{ما و} + ب^2 = ۰$، $\sqrt{لا} + \sqrt{ما} = ۱$ (۱۱

(جس کو منطق بنانے پر $لا^2 + ما^2 - ۲\,لا\,ما - ۲\,لا - ۲\,ما + ۱ = ۰$ ہو جاتی ہے) سب کی سب دوسرے درجہ کی ہیں۔

مثال ۱ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو نقطوں (۳، ۴) اور (۵، -۲) سے اِس کے فاصلے مساوی رہتے ہیں۔ اِس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

جواب: $لا - ۳\,ما = ۱$

مثال ۲ — ایک نقطہ اِس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں (ا، ۰) اور (-ا، ۰) سے اِس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ($۲\,ج^2$) رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

جواب: $لا^2 + ما^2 = ج^2 - ا^2$

مثال ۳ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں (ا، ۰) اور (-ا، ۰) سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا فرق مستقل (ج²) رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: ۴ ا لا = ± ج²

مثال ۴ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ نقطہ (۳، ۰) سے اس کا فاصلہ اُس فاصلہ کا دگنا رہتا ہے جو اس کو نقطہ (-۳، ۰) سے رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: لا² + ما² + ۱۰ لا + ۹ = ۰

مثال ۵ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ محور لا سے اس کا فاصلہ مبدا سے اُس کے فاصلہ کا نصف رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: ۳ ما² - لا² = ۰

مثال ۶ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ محور لا سے اس کا فاصلہ، نقطہ (۱، ۱) سے اُس کے فاصلہ کے مساوی رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: لا² - ۲ لا - ۲ ما + ۲ = ۰

مثال ۷ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ محوروں سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ طول کی ۴ اکائیاں رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: لا + ما = ۴

مثال ۸ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ محور لا سے اس کا فاصلہ محور سے اس کے فاصلے سے بقدر ۲ کے بڑا رہتا ہے۔ اس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: ۲ ما - لا = ۲

مثال ۹ — ایک ایسے نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۴) سے فاصلہ ۵ پر رہتا ہے۔ جواب: لا² + ما² - ۶ لا - ۸ ما = ۰

مثال ۱۰ — وہ نقطے معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۴) سے فاصلہ ۵ پر اور نقطہ (۵، ۱۲) سے فاصلہ ۱۳ پر ہیں۔

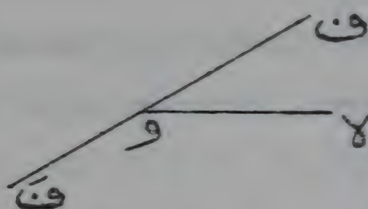
[یہ نقطے حسب ذیل دو مساواتوں کو پورا کرتے ہیں:
(لا - ۳)² + (ما - ۴)² = ۵²، (لا - ۵)² + (ما - ۱۲)² = ۱۳²]

جواب: (۰، ۰) اور (۶۴/۱۷ ، -۱۶/۱۷)

(۱۲ ۹۔۔۔ دفعات ۱ اور ۲ میں جو محدد استعمال ہوتے ہیں اُن کو کارٹیزی محدد کہتے ہیں کیونکہ ان کو سب سے پہلے ڈیکارٹ نے استعمال کیا تھا۔
لیکن ایک مستوی پر کسی نقطہ کے محل کو دوسرے طریقوں سے بھی متعین کیا جا سکتا ہے۔ اِن میں سے ایک مفید طریقہ حسبِ ذیل ہے:

قطبی محدد

اگر ایک نقطہ و کو مبداء لیا جائے اور اس میں سے ایک ثابت خطِ مستقیم و لا کھینچا جائے تو کسی نقطہ ف کا محل معلوم ہوگا اگر زاویہ لا و ف اور فاصلہ و ف معلوم ہوں۔



اِن کو نقطہ ف کے **قطبی محدد** کہا جاتا ہے۔
طول و ف کو سمتی نصف قطر کہتے ہیں اور اسے بالعموم ر سے تعبیر کرتے ہیں۔ زاویہ لا و ف کو سمتی زاویہ کہتے ہیں اور اسے طہ سے تعبیر کرتے ہیں۔
اِس زاویہ کو مثبت سمجھا جاتا ہے اگر اس کی پیمایش و لا سے اُس سمت کے خلاف کی گئی ہو جس میں گھڑی کی سوئیاں گردش کرتی ہیں۔
سمتی نصف قطر کو مثبت سمجھا جاتا ہے اگر اس کی پیمایش و سے

اُس خط پر کی گئی ہو جو سمتی زاویہ کی تحدید کرتا ہے اور منفی سمجھا جاتا ہے اگر اس کی پیمایش مخالف سمت میں کی گئی ہو۔

گرف د کو فَ تک خارج کیا جائے اور د فَ مقدار میں د ف کے مساوی ہو اور اگر ف کے محدد ر، طہ ہوں تو فَ کے محدد - ر، طہ یا ر، طہ + π ہونگے۔

۱۰۔۔۔ دو نقطوں کا جن کے قطبی محدد دیے گئے ہوں درمیانی فاصلہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دو نقطوں ف، ق کے محدد ر۱، طہ۱ اور ر۲، طہ۲ ہیں۔ تب علم مثلث سے

ف ق۲ = و ف۲ + و ق۲ - ۲ و ف × و ق جم ف و ق

لیکن و ف = ر۱، و ق = ر۲ اور زاویہ ف و ق = زاویہ لا و ق - زاویہ لا و ف = طہ۲ - طہ۱ (۱۴)

∴ ف ق۲ = ر۱۲ + ر۲۲ - ۲ ر۱ ر۲ جم (طہ۲ - طہ۱)

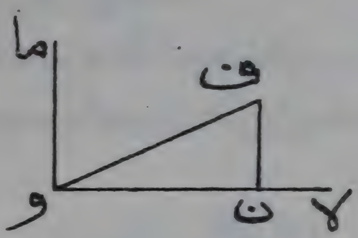
ایک دائرہ کی قطبی مساوات جب کہ دائرہ کا مرکز نقطہ ز (ا، عہ) پر ہو اور اس کا نصف قطر ج ہو ج۲ = ا۲ + ر۲ - ۲ ا ر جم (طہ - عہ) ہے جہاں دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدد ر، طہ ہیں۔

۱۱۔ قائم محددوں کو قطبی محددوں میں تبدیل کرنا۔

اگر و میں سے ایک خط و ما، و لا پر عمود کھینچا جائے اور و لا، و ما کو قائم محاور سمجھا جائے تو

لا = و ن = و ف جم لا و ف = ر جم طہ

اور ما = ن ف = و ف جب لا و ف = ر جب طہ



مثال ۱ — اُن نقطوں کے قائم محدد کیا ہیں جن کے قطبی محدد علی الترتیب ($\frac{\pi}{۲}$ ،۱)، ($\frac{\pi}{۳}$ ،۲) اور ($-\frac{\pi}{۴}$ ،۴−) ہیں۔

جواب: (۰، ۱)، (۱، $\sqrt{۳}$)، (−۲$\sqrt{۲}$، ۲$\sqrt{۲}$)

مثال ۲ — اُن نقطوں کے قطبی محدد کیا ہیں جن کے قائم محدد علی الترتیب (−۱، −۱)، (−۱، $\sqrt{۳}$) اور (۳، −۴) ہیں۔

جواب: ($\sqrt{۲}$، $\frac{۵\pi}{۴}$)، (۲، $\frac{۲\pi}{۳}$)، (۵، −مس$^{-۱}$ $\frac{۴}{۳}$)

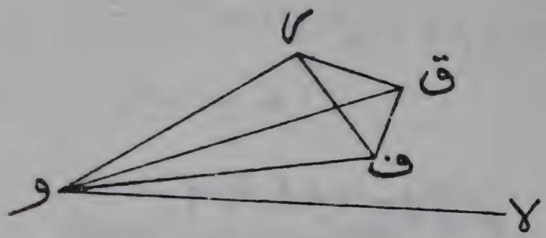
مثال ۳ — اُن نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کرو جن کے قطبی محدد (۲، ۳۰°) اور (۴، ۶۰°) ہیں۔ جواب: $\sqrt{۱۲}$

مثال ۴ — اُن نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کرو جن کے قطبی محدد (۲، ۱۰°) اور (۲، ۴۰°) ہیں۔ جواب: $\sqrt{۶} - \sqrt{۲}$

مثال ۵ — اُس نقطہ کا طریق معلوم کرو جو نقطہ (۵، $\frac{\pi}{۲}$) سے فاصلہ ۳ پر رہے۔ جواب: ر^{۲} − ۱۰ ر جب ط + ۱۶ = ۰

مثال ۶ — ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جس کا فاصلہ نقطہ (۳، $\frac{\pi}{۳}$) سے ۲ ہے۔ جواب: ر^{۲} − ۶ ر جم (ط − $\frac{\pi}{۳}$) + ۵ = ۰

۱۲ — ایک مثلث کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ اس کے راسوں کے قطبی محدد دیے گئے ہوں —



فرض کرو کہ ف، ق، ر کے محدد علی الترتیب (ر$_1$، طہ$_1$)، (ر$_2$، طہ$_2$)، (ر$_3$، طہ$_3$) ہیں۔

تب مثلث ف ق ر کا رقبہ = Δ وف ق + Δ وق ر - Δ وف ر

اور Δ وف ق = $\frac{1}{2}$ وف × وق جب ف وق

= $\frac{1}{2}$ ر$_1$ ر$_2$ جب (طہ$_2$ - طہ$_1$)

اسی طرح Δ وق ر = $\frac{1}{2}$ ر$_2$ ر$_3$ جب (طہ$_3$ - طہ$_2$)

اور Δ وف ر = $\frac{1}{2}$ ر$_3$ ر$_1$ جب (طہ$_3$ - طہ$_1$) = - $\frac{1}{2}$ ر$_3$ ر$_1$ جب (طہ$_1$ - طہ$_3$)

$\therefore$ Δ ف ق ر = $\frac{1}{2}$ {ر$_1$ ر$_2$ جب (طہ$_2$ - طہ$_1$) + ر$_2$ ر$_3$ جب (طہ$_3$ - طہ$_2$) + ر$_3$ ر$_1$ جب (طہ$_1$ - طہ$_3$)}

اگر مثلث وف ق کے رقبہ کو مثبت خیال کیا جائے جب کہ گھیرا وف ق و خلاف سمت ساعت طے ہو اور منفی جبکہ موافق سمت ساعت طے ہو اور اسی طرح دوسرے مثلثوں کے متعلق سمجھا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ تمام صورتوں میں

Δ ف ق ر = Δ وف ق + Δ وق ر + Δ ور ف

نیز ذوار بعۃ الاضلاع ف ق ر س کے لیے تمام صورتوں میں

رقبہ ف ق ر س = Δ وف ق + Δ وق ر + Δ ور س + Δ وس ف

= $\frac{1}{2}$ ر$_1$ ر$_2$ جب (طہ$_2$ - طہ$_1$) + $\frac{1}{2}$ ر$_2$ ر$_3$ جب (طہ$_3$ - طہ$_2$)

$$+\tfrac{1}{2}\,\text{ر}_2\,\text{ر}_3\,\text{جب}\,(\text{ط}_3-\text{ط}_2)+\tfrac{1}{2}\,\text{ر}_3\,\text{ر}_1\,\text{جب}\,(\text{ط}_1-\text{ط}_3)$$

اب $\text{ر}_1\,\text{ر}_2\,\text{جب}\,(\text{ط}_2-\text{ط}_1)$

$$=\text{ر}_1\,\text{ر}_2\,(\text{جب}\,\text{ط}_2\,\text{جم}\,\text{ط}_1-\text{جب}\,\text{ط}_1\,\text{جم}\,\text{ط}_2)$$

$$=\text{لا}_1\,\text{ما}_2-\text{لا}_2\,\text{ما}_1\text{،}$$ دفعہ ۱۱ سے

پس حسب دفعہ ۷

$$\text{رقبہ ف ق س س}=\tfrac{1}{2}\Big\{(\text{لا}_1\,\text{ما}_2-\text{لا}_2\,\text{ما}_1)+(\text{لا}_2\,\text{ما}_3-\text{لا}_3\,\text{ما}_2)+(\text{لا}_3\,\text{ما}_1-\text{لا}_1\,\text{ما}_3)\Big\}$$

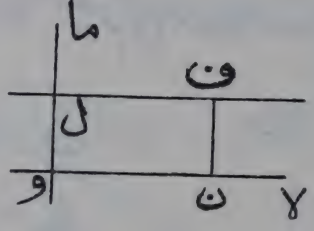
(۱۶)

دوسرا باب

خطِ مستقیم

۱۳— ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو محددوں کے محوروں میں سے ایک کے متوازی ہو—

فرض کرو کہ ل ف ایک خطِ مستقیم ہے جو محور لا کے متوازی ہے اور محور ما سے نقطہ ل پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ و ل = ب۔



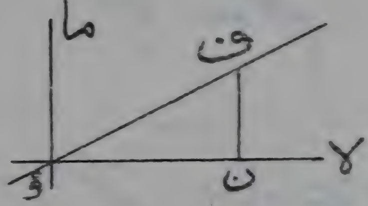
فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدد (لا، ما) ہیں۔
اب معین ن ف = و ل

پس ما = ب خط کی مساوات ہے۔

اسی طرح لا = د اُس خط کی مساوات ہے جو محور ما کے متوازی ہے اور اس سے فاصلہ د پر ہے۔

۱۴ — ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو مبدا میں سے گذرے۔

فرض کرو کہ مبدا میں سے گذرنے والا ایک خطِ مستقیم و ف ہے اور فرض کرو کہ زاویہ لا و ف کا مماس = م

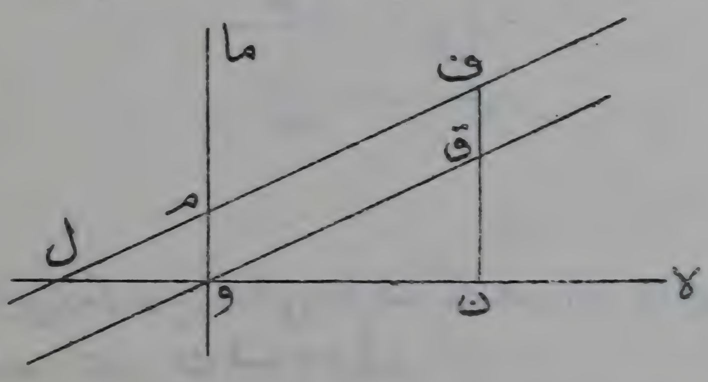


فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدد لا، ما ہیں۔

اب ن ف = مس ن و ف × و ن (۱

پس ما = م لا مطلوبہ مساوات ہے۔

۱۵ — کسی خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا۔



فرض کرو کہ ل مر ف ایک خطِ مستقیم ہے جو محوروں سے نقاط ل
اور مر پر ملتا ہے۔

فرض کرو و مر = ج اور مس و ل مر = م

فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدد لا، ما ہیں۔
ف ن کو محور ما کے متوازی اور و ق کو خط ل مر ف کے متوازی
کھینچو حسب شکل۔

اب ن ف = ن ق + ق ف

= و ن مس ن و ق + و مر

لیکن ن ف = ما، و ن = لا، و مر = ج اور مس ن و ق = مس و ل مر = م

∴ ما = م لا + ج . . . . (۱)

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

جب کوئی مخصوص خطِ مستقیم زیرِ بحث ہوتا ہے تو مقادیر م اور ج
مستقل رہتی ہیں اور اس لیے ان کو مستقل کہتے ہیں۔ اِن میں سے م
(۱۸) اُس زاویہ کا مماس ہے جو محور لا کی مثبت سمت اور خط کے اُس حصّہ
کے درمیان ہوتا ہے جو محور لا کے اوپر ہے اور ج محور ما پر کا مقطوعہ ہے۔

مستقلات م اور ج کو مناسب قیمتیں دے کر مساوات ما = م لا + ج
سے کسی خطِ مستقیم کو تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً وہ خطِ مستقیم جو محور ما کو مبداء
سے اکائی فاصلہ پر قطع کرتا ہے اور محور لا سے ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے مساوات
ما = لا + ۱ سے تعبیر ہوگا۔

ہم (۱) سے دیکھتے ہیں کہ کسی خطِ مستقیم کی مساوات پہلے درجہ کی
ہوتی ہے۔

۱۶— ثابت کرو کہ پہلے درجہ کی ہر مساوات ایک
خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

پہلے درجہ کی مساوات کی عام ترین شکل

ا لا + ب ما + ج = ۰، .... (۱)

ہے۔ اب یہ ثابت کرنے کے لیے کہ یہ مساوات ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے یہ دکھانا کافی ہے کہ اگر طریق پر کے کسی تین نقطوں کو ملایا جائے تو اِس طریقہ پر بنے ہوئے مثلث کا رقبہ صفر ہوگا۔

فرض کرو کہ طریق پر کوئی تین نقطے ف، ق، س ہیں اور ان کے محدد علی الترتیب (لا′، ما′)، (لا″، ما″) اور (لا‴، ما‴) ہیں۔ پس نقطوں کے محددوں کو مساوات (۱) پوری کرنی چاہیے، اِس لیے

ا لا′ + ب ما′ + ج = ۰،

ا لا″ + ب ما″ + ج = ۰،

ا لا‴ + ب ما‴ + ج = ۰،

اب ا، ب، ج کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

لا′	ما′	۱
لا″	ما″	۱
لا‴	ما‴	۱

= ۰

اِس لیے مثلث کا رقبہ صفر ہے (دفعہ ۶) اور اِس لیے طریق پر کے کوئی تین نقطے ایک خطِ مستقیم پر ہونے چاہییں۔

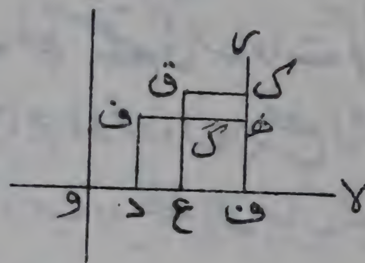
اِس لیے مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔

دوسرا ثبوت: اوپر کی مساواتوں سے بذریعہ عمل تفریق حاصل ہوتا ہے

ا (لا′ − لا″) + ب (ما′ − ما″) = ۰

اور ا (لا′ − لا‴) + ب (ما′ − ما‴) = ۰

اس لیے (لا′ − لا″) / (ما′ − ما″) = (لا′ − لا‴) / (ما′ − ما‴)



یعنے بموجب شکل $\frac{\text{ف گ}}{\text{گ ق}} = \frac{\text{ف ھ}}{\text{ھ ما}}$

اس لیے مثلثات ف گ ق، ف ھ ما متشابہ ہیں اور اِس لیے ف ق ما ایک خطِ مستقیم ہے۔

مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ میں تین مستقلات نظر آتے ہیں حالانکہ دفعہ ۱۵ میں حاصل شدہ مساوات میں صرف دو مستقلات ہیں۔ لیکن اگر کسی نقطہ کے محدد لا، ما، مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ کو پورا کرتے ہوں تو وہ اُس مساوات کو بھی پورا کرینگے جو کسی مستقل سے ضرب دینے یا تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ چنانچہ اگر ہم ب سے تقسیم کریں تو ہم مساوات کو شکل ما = - $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ لا + $\frac{\text{ج}}{\text{ب}}$ میں لکھ سکتے ہیں اور اِس میں صرف دو مستقلات - $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ اور - $\frac{\text{ج}}{\text{ب}}$ ہیں اور یہ مساوات ما = م لا + ج کے مستقلات م اور ج کے متناظر ہیں۔

مثال ۱—اُس خط کی مساوات لکھو جو محور لا کے ساتھ ۱۳۵° کا زاویہ بنائے اور محور ما کو مبداء سے فاصلہ -۳ پر قطع کرے۔　جواب: ما = -لا-۳

مثال ۲—خطِ مستقیم ۳ لا + ۲ ما - ۷ = ۰ کی مساوات کو شکل ما = م لا + ج میں لکھو۔　جواب: ما = - $\frac{۳}{۲}$ لا + $\frac{۷}{۲}$

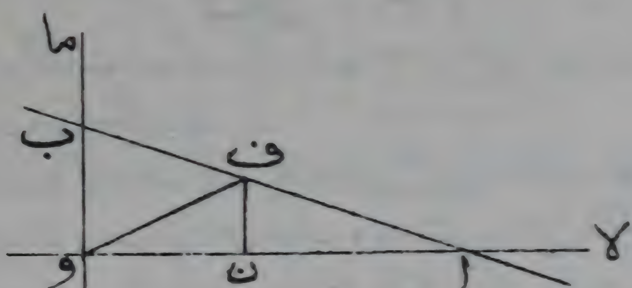
مثال ۳—ثابت کرو کہ وہ خطِ مستقیم جو محور لا کے ساتھ مس⁻¹ ۵ کا زاویہ بناتا ہے اور محور ما کو نقطہ (۰، -۵) پر قطع کرتا ہے نقطہ (۱، ۰) میں سے

گذرتا ہے۔

۱۷— ایک خطِ مستقیم کی مساوات کو اُن مقطوعوں کی رقوم میں معلوم کرنا جو وہ محوروں پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ ا اور ب وہ نقطے ہیں جہاں خطِ مستقیم محوروں کو قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ و ا = د، و ب = ب۔

فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدد لا، ما ہیں۔



ف ن کو محور ما کے متوازی کھینچو اور و ف کو ملاؤ۔

اب △ و ا ف + △ و ف ب = △ و ا ب

∴ د ما + ب لا = د ب

یا $$\frac{\text{لا}}{\text{د}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = 1$$

اِس مساوات کو شکل

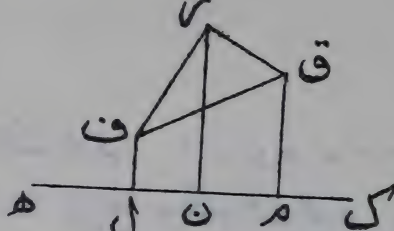
ل لا + م ما = ۱

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں ل اور م، محوروں پر کے مقطوعوں کے متکافی ہیں۔

ظِل

۱۸۔ اگر کسی خطِ مستقیم کے سروں ف اور ق سے کسی دوسرے خطِ مستقیم ھ ک پر عمود ف ل اور ق م کھینچے جائیں تو ل م کو ف ق کا ظِل، ھ ک پر، کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ کوئی اور نقطہ ر ہے اور ھ ک پر اس کا ظِل ن ہے تو چونکہ تمام صورتوں میں ل م + م ن = ل ن اس لیے یہ نتیجہ (۲۱)
نکلتا ہے کہ کسی خط پر ف ق اور ق ر کے ظِلوں کا مجموعہ اس خط پر ف ر کے ظِل کے مساوی ہوتا ہے۔



اسی طرح کسی خط پر ا ب، ب ج، ج د ...، ف ق کے ظلوں کا مجموعہ ا ق کے ظِل کے مساوی ہوتا ہے۔ نیز کسی خط پر ایک بند کثیر الاضلاع کے ضلعوں کے ظِلوں کا مجموعہ صفر کے مساوی ہوتا ہے۔

اگر ن ضلعوں والے منتظم کثیر الاضلاع کا ایک ضلع ایک معلومہ خط کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو دوسرے اضلاع ترتیب وار زاویے

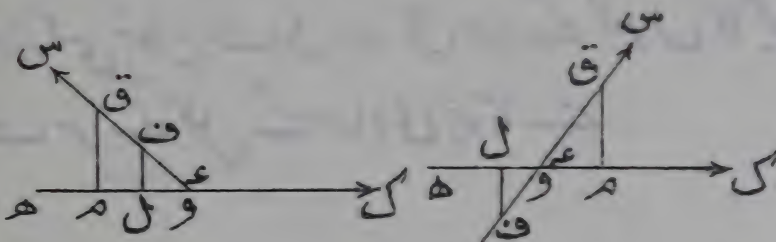
$$\text{طہ} + \frac{2\pi}{\text{ن}},\quad \text{طہ} + \frac{4\pi}{\text{ن}},\quad \text{طہ} + \frac{6\pi}{\text{ن}},\quad \ldots$$

بنائینگے اور ط کی تمام قیمتوں کے لیے حاصل ہوگا۔

جم ط + جم (ط + $\frac{۲\pi}{ن}$) + جم (ط + $\frac{۴\pi}{ن}$) + ... ن رقموں تک = ۰

فرض کرو کہ وہ خط جس پر ف ق واقع ہے ھ ک کو و پر قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ ان دو خطوں کی مثبت سمتوں و ک اور و س کے درمیان زاویہ ک و س، ع ہے۔

اب زاویہ کی جیب التمام کی تعریف کی رو سے



و ل = و ف جم ع اور و م = و ق . جم ع

∴ ل م = ف ق . جم ع

اور

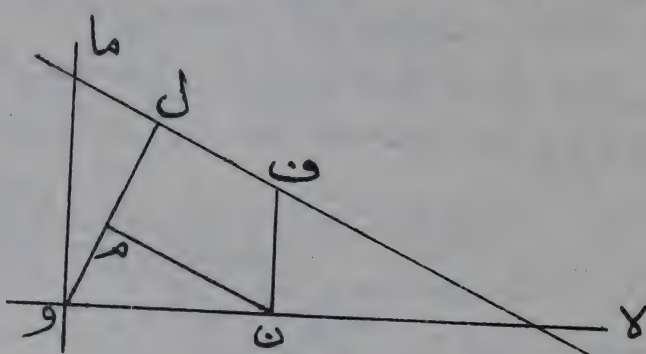
پس کسی خط ھ ک پر خط ف ق کا ظل ف ق جم ع ہوتا ہے جہاں ع وہ زاویہ ہے جو ھ ک کی مثبت سمت اور اُس خط کی مثبت سمت کے درمیان ہے جس پر ف ق واقع ہے۔

۱۹۔ ایک خطِ مستقیم پر مبداء و سے عمود و ل کھینچا

گیا ہے اور یہ عمود محور لا کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے۔ خطِ مستقیم
کی مساوات کو عمود و ل اور زاویہ عہ کی رقوم میں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ و ل = ع اور زاویہ لا و ل = عہ۔ فرض کرو کہ خط پر کے
کسی نقطہ ف کے محدد لا، ما ہیں۔

ف ن کو محور ما کے متوازی اور ن مر کو و ل پر عمود کھینچو۔



اب ن ف، و ما کے متوازی ہے اور تمام صورتوں میں

زاویہ ما و ل = زاویہ ما و لا + زاویہ لا و ل

= ۔زاویہ لا و ما + زاویہ لا و ل = $-\frac{\pi}{2}$ + عہ

و ل پر و ن اور ن ف کے ظلوں کا مجموعہ و ل کے مساوی
ہے (دفعہ ۱۸)۔

و ن کا ظل = و ن جم عہ

ن ف کا ظل = ن ف جم ($-\frac{\pi}{2}$ + عہ)

اس لیے ع = و ن جم عہ + ن ف جم ($-\frac{\pi}{2}$ + عہ)

= لا جم عہ + ما جب عہ

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

۲۰ ـــــ دفعات ۱۵، ۱۷، اور ۱۹ میں ہم نے خطِ مستقیم کی مساوات کو مختلف شکلوں میں جن میں مختلف مستقلات شامل ہوتے ہیں غیر تابع طریقوں سے معلوم کیا ہے۔ لیکن اِس مساوات کی کسی شکل کو دوسری شکل سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

مثالاً اگر ہمیں یہ مساوات محوروں پر کے مقطوعوں کی رقوم میں معلوم ہو تو ہم ع اور عہ کی رقوم میں اِس مساوات کو رشتوں و جم عہ = ع اور ب جیب عہ = ع کے ذریعہ معلوم کر سکتے ہیں جہاں یہ رشتے دفعہ ۱۹ کی شکل سے فوراً حاصل ہوجاتے ہیں۔ پس مساوات $\frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب} = ۱$ میں و اور ب کی اِن قیمتوں کو درج کرنے سے مساوات لا جم عہ + ما جیب عہ = ع حاصل ہوتی ہے۔

اگر خطِ مستقیم کی مساوات

$$ا\,لا + ب\,ما + ج = ۰$$

ہو تو اس کو $\sqrt{ا^۲ + ب^۲}$ سے تقسیم کرنے پر مساوات

$$\frac{ا}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}\,لا + \frac{ب}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}\,ما + \frac{ج}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}} = ۰$$

حاصل ہوتی ہے۔ اب $\frac{ا}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}$ اور $\frac{ب}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}$ علی الترتیب کسی خاص زاویہ کی جیب التمام اور جیب ہیں کیونکہ اِن کے مربعوں کا مجموعہ اکائی کے مساوی ہے۔ اگر ہم اِس زاویہ کو عہ کہیں تو

$$لا\,جم\,عہ + ما\,جب\,عہ - ع = ۰$$

جہاں ع کو $-\frac{ج}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}$ کی جگہ رکھا گیا ہے۔

مثال ۱ — اگر ۳ لا - ۴ ما - ۵ = ۰ کو √(۳^۲ + ۴^۲) سے تقسیم کرنے پر مساوات ۳/۵ لا - ۴/۵ ما - ۱ = ۰ حاصل ہوتی ہے - اس کی شکل لا جم عہ + ما جب عہ - ع = ۰ ہے جہاں جم عہ = ۳/۵، جب عہ = - ۴/۵ اور ع = ۱

مثال ۲ — مساوات لا + ما + ۵ = ۰، مساوات

لا جم ۵π/۴ + ما جب ۵π/۴ = ۵/√۲

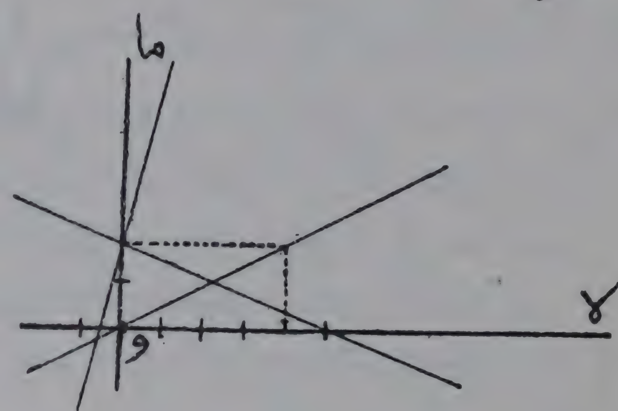
کے مماثل ہے۔

مثال ۳ — مساوات، لا + ۲۴ ما + ۲۵ = ۰ کو شکل

لا جم عہ + ما جب عہ - ع = ۰

میں لکھو۔ جواب: - ۷/۲۵ لا - ۲۴/۲۵ ما - ۱ = ۰

(۲۴) ۲۱ — جب کسی خطِ مستقیم کی مساوات دی گئی ہو تو اس کا محل معلوم کرنے کے لیے صرف یہ ضروری ہے کہ اس پر کے کسی دو نقطوں کے محدد معلوم کر لیے جائیں - ان محددوں کو معلوم کرنے کے لیے لا کی کوئی دو قیمتیں فرض کرو اور ان کے جواب میں معلومہ مساوات سے ما کی دو قیمتیں معلوم کرو - وہ نقطے جہاں خط محوروں کو قطع کرتا ہے بڑی آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں۔



مثال ۱ — خطِ مستقیم کی مساوات ۲ لا + ۵ ما = ۱۰ ہے - یہ خطِ مستقیم محور لا کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں ما = ۰ اور اس لیے لا = ۵ - محور ما کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں لا = ۰ اور اس لیے ما = ۲

مثال ۲ — خط ۴ لا - ما + ۲ = ۰ محوروں پر جو مقطوعے قطع کرتا ہے وہ علی الترتیب $-\frac{1}{2}$ اور ۲ ہیں۔

مثال ۳ — لا - ۲ ما = ۰ اس صورت میں مبداء خط پر ہے اور جب لا = ۴ تو ما = ۲

یہ سب خطوط شکل میں کھینچے گئے ہیں۔

۲۲ — اگر ہم ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا چاہیں جو کسی دو شرطوں کو پورا کرتا ہے تو ہم حسبِ ذیل عام شکلوں میں سے کوئی ایک شکل اس خط کی مساوات کے لیے فرض کر سکتے ہیں:

(۱) ما = م لا + ج، (۲) $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = 1$، (۳) ل لا + م ما = ۱،

(۴) لا جم عہ + ما جب عہ - ع = ۰، (۵) ا لا + ب ما + ج = ۰

ان میں سے کسی ایک شکل کو اختیار کر لینے کے بعد دو مستقلات م اور ج، یا ا اور ب، یا ل اور م، یا عہ اور ع، یا $\frac{\text{ا}}{\text{ج}}$ اور $\frac{\text{ب}}{\text{ج}}$ کی قیمتوں کو اُن دو شرطوں سے متعین کرنا ہوگا جن کو خط پورا کرتا ہے۔

مثال ۱ — ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۲، ۳) میں سے گذرتا ہے اور محوروں پر مساوی مقطوعے قطع کرتا ہے۔

[فرض کرو کہ خط کی مساوات $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = 1$ ہے۔

اب چونکہ مقطوعے مساوی ہیں اس لیے ا = ب

نیز چونکہ نقطہ (۲، ۳) خط پر ہے اس لیے $\frac{2}{\text{ا}} + \frac{3}{\text{ا}} = 1$

∴ ا = ۵ = ب اور مطلوبہ مساوات $\frac{\text{لا}}{5} + \frac{\text{ما}}{5} = 1$ ہے]

مثال ۲ — اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (√۳ ، ۲) میں سے گذرتا ہے اور محور لا کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتا ہے۔

[فرض کرو کہ خطِ مستقیم کی مساوات ما = م لا + ج ہے۔
تب چونکہ خطِ مستقیم محور لا کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتا ہے اِس لیے م = مس ۶۰° = √۳ - نیز نقطہ (√۳ ، ۲) خط پر ہے اِس لیے ۲ = م √۳ + ج اور اِس لیے ج = -۱ ، پس مطلوبہ مساوات ما = √۳ لا - ۱ ہے -]

مثال ۳ — جب مساوات ۵ لا + ۱۲ ما - ۲۶ = ۰ کو شکل لا جم عہ + ما جیب عہ = ع میں لکھا جائے تو ع کی قیمت معلوم کرو۔ جواب: ۲

مثال ۴ — خط لا/۲۴ + ما/۷ = ۱ کا مبداء سے عمودی فاصلہ معلوم کرو۔ جواب: ۶٫۷۲

مثال ۵ — ثابت کرو کہ وہ خط جس کے مقطوعے محاور لا اور ما پر علی الترتیب ۵ اور -۴ ہیں نقطہ (۱۵ ، ۸) میں سے گذرتا ہے۔

مثال ۶ — ثابت کرو کہ وہ خط جو نقطوں (۵ ، ۰) ، (۰ ، -۲) میں سے گذرتا ہے نقطوں (۱۵ ، ۴) اور (-۵ ، -۴) میں سے بھی گذرتا ہے۔

مثال ۷ — اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۴ ، ۱۲) میں سے گذرتا ہے اور محور لا کے ساتھ زاویہ مس⁻¹ ۳ بناتا ہے۔ جواب: ما = ۳ لا

مثال ۸ — ثابت کرو کہ نقطوں (۳ ، ۴) اور (۵ ، ۱) کو ملانے والے خطِ مستقیم کا نقطہ وسطی خط لا - ۲ ما + ۱ = ۰ پر ہے۔

مثال ۹ — ثابت کرو کہ خط ما - لا + ۲ = ۰ اُس خط کو جو نقطوں (۳ ، ۱۰) اور (۸ ، ۹) کو ملاتا ہے نسبت ۲ : ۳ میں قطع کرتا ہے۔

مثال ۱۰ — ثابت کرو کہ خط ۲ ما - ۳ لا - ۷ = ۰ اُس خط کو جو (۱ ، -۱) اور (۳ ، ۴) کو ملاتا ہے نسبت ۳ : -۲ میں خارجاً قطع کرتا ہے۔

(۲۶) ۲۳ — ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا

جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے معلومہ سمت میں کھینچا گیا ہو۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ کے محدد لاَ ، ماَ ہیں اور فرض کرو کہ خط محور لا کے ساتھ مس$^{-1}$م کا زاویہ بناتا ہے۔

تب اس خط کی مساوات

ما = م لا + ج

ہوگی اور چونکہ (لاَ ، ماَ) اس خط پر ہے اس لیے

ماَ = م لاَ + ج

اس لیے تفریق کرنے پر

ما - ماَ = م (لا - لاَ) .... (۱)

وہ خط جو (۱) سے حاصل ہوتا ہے نقطہ (لاَ ، ماَ) میں سے گذرتا ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ پس م کو مناسب قیمت دینے سے یہ مساوات کسی خطِ مستقیم کو جو نقطہ (لاَ ، ماَ) میں سے گذریگا تعبیر کریگی۔

پس جب ہمیں یہ معلوم ہوجائے کہ ایک خطِ مستقیم ایک مخصوص نقطہ (لاَ ، ماَ) میں سے گذرتا ہے تو ہم اس کی مساوات کے لیے فوراً لکھ لیتے ہیں۔

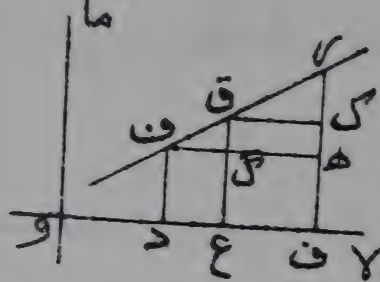
ما - ماَ = م (لا - لاَ)

اور پھر م کی قیمت کو اُس دوسری شرط سے معلوم کرتے ہیں جس کو خط پورا کرتا ہے۔

۲۴ — ایک خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گذرے —

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطے ف اور ق علی الترتیب (لا۱ ، ما۱) اور (لا۲ ، ما۲) ہیں اور فرض کرو کہ خطِ مستقیم ف ق پر کوئی دوسرا نقطہ س

(لا، ما) ہے۔



اب چونکہ ف ق سا ایک خطِ مستقیم ہے مثلثات ف گ ق، (۲۷)
ف ھ سا، متشابہ ہیں اور اس لیے

$$\frac{\text{ف ھ}}{\text{ف گ}} = \frac{\text{ھ سا}}{\text{گ ق}}$$

یعنی

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}_1} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}$$

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

دوسرا طریقہ: فرض کرو کہ خطِ مستقیم کی مساوات

$$\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = 0، \quad \ldots\ldots (۱)$$

ہے تب چونکہ نقاط $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ اس خط پر ہیں اس لیے

$$\text{ا لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ج} = 0، \quad \ldots\ldots (۲)$$

اور $$\text{ا لا}_2 + \text{ب ما}_2 + \text{ج} = 0، \quad \ldots\ldots (۳)$$

مساواتوں (۱)، (۲) اور (۳) سے ا، ب، ج کو ساقط کرو تو مطلوبہ

مساوات شکل

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & ۱ \\ \text{لا}_۱ & \text{ما}_۱ & ۱ \\ \text{لا}_۲ & \text{ما}_۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

میں حاصل ہوگی۔

مثال ۱ — نقاط (۲، ۳) اور (۳، ۱) کو ملانے والے خط کی مساوات

$$\frac{\text{ما} - ۳}{۱ - ۳} = \frac{\text{لا} - ۲}{۳ - ۲} \quad \text{یا} \quad \text{ما} + ۲\text{لا} - ۷ = ۰$$

ہے۔

مثال ۲ — اُن خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو (i) نقاط (۱، ۳) اور (۵، ۷) (ii) نقاط (−۷، ۱۰) اور (۱۳، ۰) کو ملاتے ہیں۔

جواب: (i) لا − ما + ۲ = ۰، (ii) لا + ۲ما − ۱۳ = ۰

مثال ۳ — ثابت کرو کہ (۳، ۵) اور (−۲، ۷) کو ملانے والا خط اُس خط کی تنصیف کرتا ہے جو (۷، ۲) اور (۹، ۴) کو ملاتا ہے۔

مثال ۴ — ثابت کرو کہ (۳، ۲) اور (۶، −۹) کو ملانے والا خط محور ما کو مبدا سے اکائی فاصلہ پر قطع کرتا ہے۔

مثال ۵ — ثابت کرو کہ دو نقطوں (۹، ۳) اور (۱۵، −۳) میں سے گذرنے والا خط محوروں پر مساوی مقطوعے قطع کرتا ہے۔

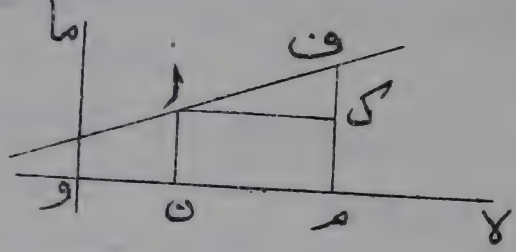
مثال ۶ — وہ خطوط معلوم کرو جو نقطہ (۴، −۳) میں سے گذرتے ہیں اور محوروں کو اِس طرح قطع کرتے ہیں کہ مقطوعے مقدار میں مساوی ہوتے ہیں۔

جواب: لا + ما − ۱ = ۰ اور لا − ما − ۷ = ۰

۲۵ — فرض کرو کہ خطِ مستقیم ا ف، محور لا کے ساتھ زاویہ (۲۸
طہ بناتا ہے۔ فرض کرو کہ ا کے محدد لاَ، ماَ اور ف کے محدد لا، ما ہیں
اور فاصلہ ا ف = ر۔

ا ن اور ف ھ کو محور ما کے متوازی کھینچو۔ ا ک کو محور لا کے

متوازی کھینچو۔



تب اک = اف جم طہ اور ک ف = اف جب طہ

یا لا۔لاَ = ر جم طہ اور ما۔ ماَ = ر جب طہ

خط ا ف کی مساوات کو شکل

$$\frac{\text{لا} - \text{لاَ}}{\text{جم طہ}} = \frac{\text{ما} - \text{ماَ}}{\text{جب طہ}} = \text{ر}$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

۲۶ — فرض کرو کہ کسی خطِ مستقیم کی مساوات

ا لا + ب ما + ج = ۰ . . . . (۱)

ہے۔

فرض کرو کہ کسی نقطہ ق کے محدد لاَ، ماَ ہیں اور فرض کرو کہ وہ خط جو محور ما کے متوازی ہے اور ق ہیں سے گذرتا ہے دیے ہوئے خط کو نقطہ ف پر قطع کرتا ہے جس کے محدد لاَ، ماَ ہیں۔

تب ایک شکل سے یہ ظاہر ہوگا کہ جب تک ق، خطِ مستقیم کی ایک ہی جانب رہتا ہے ق ف کو ایک ہی سمت میں کھینچنا پڑتا ہے لیکن جب، ق، خطِ مستقیم کی دوسری جانب واقع ہوتا ہے تو ق ف کو مخالف

سمت میں کھینچنا پڑتا ہے۔

اس کا یہ مطلب ہے کہ ق ف، خطِ مستقیم کی ایک جانب کے تمام نقطوں کے لیے **مثبت** ہے اور دوسری جانب کے تمام نقطوں کے لیے **منفی**۔

اب ق ف = ماً - مَا .... (۲)

اور ا لَا + ب مَا + ج = ا لَا + ب مَا + ج - (ا لاً + ب ماً + ج)

[کیونکہ (لاً، ماً) خط پر ہے اور اس لیے ا لاً + ب ماً + ج = ۰]

∴ ا لَا + ب مَا + ج = - ب (ماً - مَا)، ...... (۳)

(۲) اور (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ا لَا + ب مَا + ج، خطِ مستقیم کی ایک جانب کے تمام نقطوں کے لیے، مثبت ہے اور دوسری جانب کے تمام نقطوں کے لیے منفی ہے۔

اگر ایک خطِ مستقیم کی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ ہو اور کسی نقطہ (لَا، مَا) کے محدد جملہ ا لا + ب ما + ج میں درج کیے جائیں تب اگر ا لَا + ب مَا + ج مثبت ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ (لَا، مَا) خط کی **مثبت جانب** واقع ہے لیکن اگر ا لَا + ب مَا + ج منفی ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ (لَا، مَا) خط کی **منفی جانب** واقع ہے۔

اگر خط کی مساوات کو

- ا لا - ب ما - ج = ۰

لکھا جائے تو یہ ظاہر ہے کہ وہ جانب جس کو ہم نے **مثبت جانب** کہا ہے اب اُسے **منفی جانب** کہنا چاہیے۔

مثال ۱ — نقطہ (۳،۲) خط ۲ لا - ۳ ما - ۱ = ۰ کی منفی جانب پر ہے اور خط ۳ لا - ۲ ما - ۱ = ۰ کی مثبت جانب پر ہے۔

مثال ۲ — نقاط (۲، -۱) اور (۱، ۱)، خط ۳ لا + ۴ ما - ۶ = ۰ کی مخالف جانبوں پر ہیں۔

مثال ۳ — ثابت کرو کہ چار نقطے (۰،۰)، (-۱،۱)، (-۷،۴) اور (۶،۹) خطوطِ مستقیم ۲ لا - ۳ ما + ۱ = ۰ اور ۳ لا - ۵ ما + ۲ = ۰ سے بنے ہوئے چار مختلف خانوں میں

واقع ہیں۔

۲۷۔ دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کے نقطۂ تقاطع کے محدد معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

ا لا + ب ما + ج = ۰، .... (۱)

اَ لا + بَ ما + جَ = ۰، .... (۲)

ہیں۔

اب اُس نقطہ کے محدد جو دونوں خطوطِ مستقیم میں مشترک ہے دونوں مساواتوں (۱) اور (۲) کو پورا کرینگے۔ پس ہمیں لا اور ما کی وہ قیمتیں معلوم کرنی ہیں جو مساواتوں (۱) اور (۲) دونوں کو پورا کریں۔ یہ قیمتیں

لا / (ب جَ - بَ ج) = ما / (ج اَ - جَ ا) = ۱ / (ا بَ - اَ ب)

سے حاصل ہوتی ہیں۔

(۳۰) **۲۸ — وہ شرط معلوم کرنا کہ تین خطوطِ مستقیم ایک نقطہ پر مل سکیں۔**

فرض کرو کہ تین خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

ا لا + ب ما + ج = ۰، .... (۱)

اَ لا + بَ ما + جَ = ۰، .... (۲)

اً لا + بً ما + جً = ۰، .... (۳)

ہیں۔

یہ تین خطوطِ مستقیم ایک نقطہ پر ملینگے اگر اِن میں سے دو خطوں کا نقطۂ تقاطع تیسرے خط پر واقع ہو۔

خطوطِ مستقیم (۱) اور (۲) کے نقطۂ تقاطع کے محدد

لا / (ب جَ - بَ ج) = ما / (ج اَ - جَ ا) = ۱ / (ا بَ - اَ ب)

سے حاصل ہوتے ہیں۔

وہ شرط کہ یہ نقطہ خط (۳) پر واقع ہو یہ ہے کہ

اً (ب جَ - بَ ج) / (ا بَ - اَ ب) + بً (ج اَ - جَ ا) / (ا بَ - اَ ب) + جً = ۰

یا اً (ب جَ - بَ ج) + بً (ج اَ - جَ ا) + جً (ا بَ - اَ ب) = ۰

مثالیں

۱۔ وہ خطوطِ مستقیم کھینچو جن کی مساواتیں ہیں

(۱) لا + ما = ۲، (۲) ۳ لا - ۴ ما = ۱۲

(۳) ۴ لا - ۳ ما + ۱ = ۰، (۴) ۲ لا + ۵ ما + ۷ = ۰

۲۔ اُن خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطوں کے حسب ذیل جوڑوں کو ملاتے ہیں :

(۱) (۲، ۳) اور (-۴، ۱)، (۲) (اَ، ب) اور (ب، ا)

جواب: (۱) لا - ۳ ما + ۷ = ۰ (۲) لا + ما = ا + ب

۳۔ اُن خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۱، -۱) میں سے گذرتے ہیں اور محور لا کے ساتھ علی الترتیب زاویے ۶۰° اور ۳۰° بناتے ہیں۔

جواب: ما + ۱ = ∓ ۱/√۳ (لا - ۱)

۴۔ حسب ذیل مساواتوں کو شکل لا جم ء + ما جب ء - ع = ۰ میں لکھو:

(۱) ۳ لا + ۴ ما - ۱۵ = ۰، (۲) ۱۲ لا - ۵ ما + ۱۰ = ۰

جواب: (۱) ۳/۵ لا + ۴/۵ ما - ۳ = ۰، (۲) - ۱۲/۱۳ لا + ۵/۱۳ ما - ۱۰/۱۳ = ۰

۵۔ اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۴، ۵) میں سے گزرتا ہے اور

خط ۲لا - ۳ما - ۵ = ۰ کے متوازی ہے۔ جواب: ۲لا - ۳ما + ۷ = ۰

۶۔ اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۲، ۱) میں سے گزرتا ہے اور نقاط (۲، ۳)، (۳، -۱) کو ملانے والے خط کے متوازی ہے۔ جواب: ۴لا + ما = ۹

۷۔ اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۵، ۶) میں سے گزرتا ہے اور محوروں
(۳۱) پر مساوی مقطوعے قطع کرتا ہے۔ جواب: لا + ما = ۱۱

۸۔ خطوطِ مستقیم کے حسبِ ذیل زوجوں کے نقاطِ تقاطع معلوم کرو:

(۱) ۵لا + ۷ما = ۹۹ اور ۳لا + ۲ما + ۷۷ = ۰؛ (۲) ۲لا - ۵ما + ۱ = ۰ اور لا + ما + ۴ = ۰

(۳) لا/ا + ما/ب = ۱ اور لا/ب + ما/ا = ۱

جواب: (۱) (-۷۷، ۶۲)؛ (۲) (-۳، -۱)؛ (۳) اب/(ا+ب)، اب/(ا+ب)

۹۔ ثابت کرو کہ تین خطوطِ مستقیم ۵لا + ۳ما = ۷، ۳لا - ۴ما = ۱۰ اور لا + ۲ما = ۰ ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ تین نقطے (۰، ۱۱)، (۲، ۳) اور (۳، -۱) ایک خطِ مستقیم پر ہیں۔

نیز تین نقطے (۳ا، ۰)، (۰، ۳ب) اور (ا، ۲ب) بھی ایک خطِ مستقیم پر ہیں۔

۱۱۔ اُس مثلث کے اضلاع کی مساواتیں معلوم کرو جس کے راسوں کے محدد (۱، ۲)، (۲، ۳)، (-۳، -۵) ہیں۔

جواب: ۸لا - ۵ما - ۱ = ۰، ۷لا - ۴ما + ۱ = ۰، لا - ما + ۱ = ۰

۱۲۔ اُن خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جن میں سے ہر ایک، مثال ۱۱ کے مثلث کے راسوں میں سے ایک میں سے اور مقابل کے ضلع کے نقطۂ وسطی میں سے گزرتا ہے۔ جواب: ۲لا - ما = ۰، ۳لا - ۲ما = ۰، ۵لا - ۳ما = ۰

۱۳۔ اُس متوازی الاضلاع کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو جس کے اضلاع کی مساواتیں

لا - ا = ۰، لا - ب = ۰، ما - ج = ۰، ما - د = ۰

ہیں۔

جواب: (د-ج) لا + (ا-ب) ما + ب ج - ا د = ۰، (د-ج) لا + (ب-ا) ما + ا ج - ب د = ۰

۱۴۔۔۔ ا کی کیا قیمت ہونی چاہیے کہ تین خطوطِ مستقیم

۳ لا + ۲ ما - ۲ = ۰، ا لا + ۲ ما - ۳ = ۰، ۲ لا - ما - ۳ = ۰

ایک نقطہ پر مل سکیں۔

۱۵۔۔۔ نقطوں (۱، ۲) اور (۴، ۳) کو ملانے والا خط، نقطوں (۲، ۳) اور (۴، ۱) کو ملانے والے خط سے کس نسبت میں تقسیم ہوتا ہے۔

جواب: خط کی تنصیف ہوتی ہے۔

۱۶۔۔۔ معلوم کرو کہ آیا نقطے (۲، ۳) اور (۳، ۲) خطِ مستقیم ۵ ما - ۶ لا + ۴ = ۰ کی ایک ہی جانب واقع ہیں یا مخالف جانبوں پر۔

۱۷۔۔۔ ثابت کرو کہ نقطے (۰، ۰) اور (۳، ۴) خط ما - ۲ لا + ۱ = ۰ کی مخالف جانبوں پر واقع ہیں۔

۱۸۔۔۔ ثابت کرو کہ مبداء اُس مثلث کے اندر ہے جس کے ضلعوں کی مساواتیں

لا - ۷ ما + ۲۵ = ۰، ۵ لا + ۳ ما + ۱۱ = ۰، ۳ لا - ۲ ما - ۱ = ۰

ہیں۔ [متناظر راس (-۱، -۲) (۳، ۴) (-۴، ۳) ہیں]

۲۹۔۔۔ دو خطوطِ مستقیم کی مساواتیں دی گئی ہیں۔ اِن خطوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا۔

(ا) اگر دیے ہوئے خطوں کی مساواتیں

لا جم عہ + ما جب عہ - ع = ۰، لا جم عہَ + ما جب عہَ - عَ = ۰

ہوں تو مطلوبہ زاویہ عہ - عہَ یا π - (عہ - عہَ) ہوگا۔

کیونکہ عہ اور عہَ وہ زاویے ہیں جو وہ عمود محور لا کے ساتھ بناتے ہیں جن کو مبداء سے اِن خطوں پر علی الترتیب کھینچا گیا ہے اور یہ ظاہر ہے کہ کسی دو خطوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی یا متمم ہوتا ہے جو ان خطوں کے عمودوں کے درمیان بنتا ہے۔

(۲) اگر خطوں کی مساواتیں

ما = م لا + ج ، ما = مَ لا + جَ

ہوں اور طہ ، طہَ وہ زاویے ہوں جو یہ خطوط محور لا کے ساتھ بناتے ہیں تو
مس طہ = م اور مس طہَ = مَ اور اِس لیے

مس (طہ - طہَ) = (م - مَ) / (۱ + م مَ)

∴ مطلوبہ زاویہ مس^-۱ ((م - مَ) / (۱ + م مَ)) ہے۔

یہ خطوط ایک دوسرے پر عمود ہونگے جبکہ

۱ + م مَ = ۰

اور متوازی ہونگے جبکہ

م = مَ

(۳) اگر خطوں کی مساواتیں

ا لا + ب ما + ج = ۰ ، اَ لا + بَ ما + جَ = ۰

ہوں تو اِن مساواتوں کو شکلوں

ما = - (ا/ب) لا - (ج/ب) اور ما = - (اَ/بَ) لا - (جَ/بَ)

میں لکھا جا سکتا ہے۔ اِس لیے (۲) کی رو سے مطلوبہ زاویہ

مس^-۱ ((- ا/ب + اَ/بَ) / (۱ + ا اَ/ب بَ)) یا مس^-۱ ((ب اَ - بَ ا) / (ا اَ + ب بَ))

ہے۔

خطوط ا لا + ب ما + ج = ۰ ، اور اَ لا + بَ ما + جَ = ۰ (۳
ایک دوسرے پر عمود ہونگے اگر

ا اَ + ب بَ = ۰

اور متوازی ہونگے اگر

$$ب اَ - بَ ا = ۰ \quad یا \quad \frac{ا}{اَ} = \frac{ب}{بَ}$$

۳۰ — عمودیت کی شرط صریحاً اُن دو خطوں سے پوری ہوتی ہے جن کی مساواتیں

$$ا لا + ب ما + ج = ۰ \quad اور \quad ب لا - ا ما + جَ = ۰$$

ہیں - یہ شرط اِن دو خطوں

$$ا لا + ب ما + ج = ۰ ، \quad اور \quad \frac{لا}{ا} - \frac{ما}{ب} + جَ = ۰$$

سے بھی پوری ہوتی ہے -

پس اگر ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم کی مساوات میں لا اور ما کے سروں کو باہم بدلا جائے (یا انہیں مقلوب کیا جائے) اور اِن میں سے ایک کی علامت تبدیل کی جائے تو ایک ایسے خطِ مستقیم کی مساوات حاصل ہوگی جو دیے ہوئے خطِ مستقیم پر عمود ہوگا، اب اگر یہ خط کسی دوسری شرط کو بھی پورا کرتا ہے تو مستقل رقم کو موزوں قیمت دینی چاہیے -

مثال ۱ — وہ خط جو مبدا میں سے گذرتا ہے اور ۴ ما + ۲ لا = ۰ پر عمود ہے ۲ ما - ۴ لا = ۰ ہے -

مثال ۲ — وہ خط جو نقطہ (۴، ۵) میں سے گذرتا ہے اور ۳ لا - ۲ ما + ۵ = ۰ پر عمود ہے ۲ (لا - ۴) + ۳ (ما - ۵) = ۰ ہے کیونکہ وہ دیے ہوئے خط پر عمود ہے اور نقطہ (۴، ۵) میں سے گذرتا ہے -

مثال ۳ — خطوط

$$۲ لا + ۳ ما + ۱ = ۰ \quad اور \quad لا - ما = ۰$$

کے درمیان حادہ زاویہ مسں ۱ ۵ ہے -

مثال ۴ — ثابت کرو کہ نقطوں (۳، -۱) اور (۲، ۳) کو ملانے والا خط
نقطوں (۵، ۲) اور (۹، ۳) کو ملانے والے خط پر عمود ہے ۔

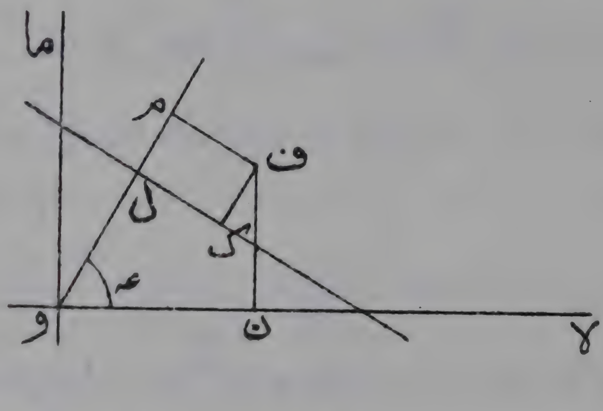
مثال ۵ — خطوط ۳لا + ما - ۷ = ۰ اور لا + ۲ما + ۹ = ۰ کے
درمیان حادہ زاویہ معلوم کرو ۔ جواب : ۴۵°

مثال ۶ — خطوط ۳لا - ۲ما + ۷ = ۰ اور ۲لا + ما - ۱۱ = ۰ کے درمیان
حادہ زاویہ معلوم کرو ۔ جواب : مس^{-۱} ۷/۴

مثال ۷ — وہ خطوط معلوم کرو جو نقطہ (۲، ۳) میں سے گذرتے ہیں
اور خط ۳لا - ما + ۵ = ۰ کے ساتھ ۴۵° کے حادہ زاویے بناتے ہیں ۔
جواب : لا - ۲ما + ۴ = ۰، ۲لا + ما - ۷ = ۰

۳۱ — ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم سے ایک دیے ہوئے نقطہ کا عمودی فاصلہ معلوم کرنا ۔ (۳۴)

فرض کرو کہ خطِ مستقیم کی مساوات
لا جم ع + ما جب ع - ع = ۰، .... (۱)
ہے اور فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ کے محدد لا، ما ہیں ۔



فرض کرو کہ دیے ہوئے خطِ مستقیم پر مبداء سے اور نقطہ (لا، ما) سے
عمود و ل، ف ک ہیں ۔

ف ن کو و لا پر اور ف م کو و ل پر عمود کھینچو۔

تب و م = و ل پر و ن اور ن ف کے ظلوں کا مجموعہ

اب ن ف، و ما کے متوازی ہے اور تمام صورتوں میں

زاویہ ما و ل = زاویہ ما و لا + زاویہ لا و ل

$= -$ زاویہ لا و ما + زاویہ لا و ل $= -\frac{\pi}{2} +$ عہ

و ل پر و ن کا ظل و ن جم عہ ہے اور ن ف کا ظل

$$\text{ن ف جم}\left(-\frac{\pi}{2} + \text{عہ}\right)$$

۷- پس و م = لا۱ جم عہ + ما۱ جب عہ

∴ ک ف = ل م = و م - و ل

= لا۱ جم عہ + ما۱ جب عہ - ع

پس خط لا جم عہ + ما جب عہ - ع = ۰ پر کسی نقطہ سے عمود کھینچا جائے تو اس کا طول جملہ

لا جم عہ + ما جب عہ - ع

میں نقطہ کے محددوں کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

(۳) اگر خط کی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ ہو تو اس کو (دفعہ ۲۰) لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{لا} + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{ما} + \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}} = 0 \,,\ \ldots\ldots\ (۲)$$

میں لکھا جا سکتا ہے اور یہ شکل وہی ہے جو (۱) کی ہے۔ اس لیے اس خط پر نقطہ لا۱، ما۱ سے کھینچے ہوئے عمود کا طول

$$\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{لا}_1 + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{ما}_1 + \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$$

$$\frac{ا لا_۱ + ب ما_۱ + ج}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}} \text{، } \ldots\ldots\ldots (۳)$$

یا

ہے ۔

دوسرا طریقہ: ۔ اُس خط کی مساوات جو نقطہ ف (لا۱، ما۱) میں سے گذرتا ہے اور خط ا لا + ب ما + ج = ۰ پر عمود ہے

$$ب(لا - لا_۱) - ا(ما - ما_۱) = ۰$$

ہے ۔

اگر یہ عمودی خط دیے ہوئے خط سے نقطہ ک پر ملے اور ک کے محدد لا۲، ما۲ ہوں تو چونکہ ک دونوں خطوں پر ہے اس لیے

$$ب(لا_۲ - لا_۱) - ا(ما_۲ - ما_۱) = ۰ \text{، } \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور $ا لا_۲ + ب ما_۲ + ج = ۰$ جس کو لکھا جا سکتا ہے

$$ا(لا_۲ - لا_۱) + ب(ما_۲ - ما_۱) = -(ا لا_۱ + ب ما_۱ + ج) \text{، } \ldots (۲)$$

(۱) اور (۲) کا مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$(ا^۲ + ب^۲)\left\{(لا_۲ - لا_۱)^۲ + (ما_۲ - ما_۱)^۲\right\} = (ا لا_۱ + ب ما_۱ + ج)^۲$$

اس لیے $ک ف = \left\{(لا_۲ - لا_۱)^۲ + (ما_۲ - ما_۱)^۲\right\}^{\frac{۱}{۲}}$

$$= \frac{ا لا_۱ + ب ما_۱ + ج}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲}}$$

پس جب ایک خطِ مستقیم کی مساوات کو شکل ا لا + ب ما + ج = ۰ میں دیا جائے تو اس سے ایک دیے ہوئے نقطہ کا عمودی فاصلہ جملہ ا لا + ب ما + ج میں نقطہ کے محدد درج کرنے اور لا، ما کے سروں کے مربعوں کے مجموعہ کے جذر المربع سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے ۔

اگر $\sqrt{\text{ا}'^2 + \text{ب}'^2}$ کو ہمیشہ مثبت فرض کیا جائے تو خط کی مثبت جانب کے کسی نقطہ سے کھینچے ہوئے عمود کا طول مثبت ہوگا اور منفی جانب کے کسی نقطہ سے کھینچے ہوئے عمود کا طول منفی ہوگا۔ [دیکھو دفعہ ۲۶]

۳۴ ـ اُن خطوں کی مساواتیں معلوم کرنا جو دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کریں۔ ۳)

اگر دو خطوطِ مستقیم کے درمیانی زاویوں کے ناصف کھینچے جائیں اور اِن ناصفوں میں سے ایک پر کے کسی نقطے سے خطوں پر عمود ڈالے جائیں تو یہ ظاہر ہے کہ یہ عمود مقدار میں ایک دوسرے کے مساوی ہونگے۔

پس اگر خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

$$\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = 0, \quad \ldots\ldots (1)$$

اور

$$\text{ا}'\text{لا} + \text{ب}'\text{ما} + \text{ج}' = 0, \quad \ldots\ldots (2)$$

ہوں اور دو ناصفوں میں سے کسی ایک پر کوئی نقطہ (لاَ، ماَ) ہو تو

$$\frac{\text{ا لا}' + \text{ب ما}' + \text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ا}'\text{لا}' + \text{ب}'\text{ما}' + \text{ج}'}{\sqrt{\text{ا}'^2 + \text{ب}'^2}}$$

مقداریں مساوی ہونے چاہییں۔

اِس لیے نقطہ (لاَ، ماَ) خطوطِ مستقیم

$$\frac{\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}} = \pm \frac{\text{ا}'\text{لا} + \text{ب}'\text{ما} + \text{ج}'}{\sqrt{\text{ا}'^2 + \text{ب}'^2}}, \quad \ldots\ldots (3)$$

میں سے کسی ایک پر ہے۔

اِس لیے وہ دو خطوط جو (۳) سے حاصل ہوتے ہیں مطلوبہ ناصف ہیں۔

ہم اِن دو ناصفوں میں تمیز کر سکتے ہیں کیونکہ اگر ہم دونوں نسب نماؤں کو مثبت لیں اور اگر (۳) میں اوپر کی علامت لی جائے تو ا لا + ب ما + ج اور

اَ لا + بَ ما + جَ دونوں یا تو مثبت ہونے چاہئیں یا دونوں منفی ۔

پس
$$\frac{\text{ا لا + ب ما + ج}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}} = + \frac{\text{اَ لا + بَ ما + جَ}}{\sqrt{\text{اَ}^2 + \text{بَ}^2}} \text{، .... (۴)}$$
میں ہر نقطہ، خطوط (۱) اور (۲) دونوں کی مثبت جانب ہے یا دونوں کی منفی جانب ۔

اگر مساواتوں کو اس طرح لکھا جائے کہ مستقل ارقام دونوں مثبت ہوں تو مبدا، دونوں خطوں کی مثبت جانب ہوگا اور اس لیے (۴) اُس زاویہ کا ناصف ہوگا جس میں مبدا واقع ہے ۔

مثال ۱ ۔ خطوط ۴لا - ۳ما + ۱ = ۰ اور ۱۲ لا + ۵ ما + ۱۳ = ۰ کے (۳۷)
درمیانی زاویوں کے ناصف
$$\frac{\text{۴لا - ۳ما + ۱}}{\text{۵}} = \pm \frac{\text{۱۲لا + ۵ما + ۱۳}}{\text{۱۳}}$$
سے حاصل ہوتے ہیں اور اوپر کی علامت لینے سے وہ ناصف ملتا ہے جس میں مبدا واقع ہے ۔

حسب ذیل مثال اہم ہے ۔

مثال ۲ ۔ ایک مثلث ا ب ج کے راس ا، ب، ج کے محدد علی الترتیب (۱، ۲)، (۲۵، ۸) اور (۹، ۲۱) ہیں ۔ اس مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز معلوم کرو ۔

اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کی مساواتیں

۱۳ لا + ۱۶ ما - ۴۵۳ = ۰، ۱۹ لا - ۸ ما - ۳ = ۰، اور لا - ۴ ما + ۷ = ۰

ہیں ۔ اگر ان مساواتوں کے دائیں جانبی ارکان میں ا، ب، ج کے محددوں کو درج کیا جائے تو نتائج علی الترتیب - ، + ، - ہوں گے ۔

اب اضلاع کی مساواتوں میں تمام ارقام کی علامتیں (اگر ضرورت ہو) تبدیل کرو تاکہ ہر راس مقابل کے ضلع کی مثبت جانب ہو ۔ تب مساواتیں ہوں گی

- ۱۳ لا - ۱۶ ما + ۴۵۳ = ۰، ۱۹ لا - ۸ ما - ۳ = ۰، - لا + ۴ ما - ۷ = ۰ ۔

پس $$\frac{-۱۳\text{لا} - ۱۶\text{ما} + ۴۵۳}{\sqrt{۱۳^{۲} + ۱۶^{۲}}} = \pm \frac{۱۹\text{لا} - ۸\text{ما} - ۳}{\sqrt{۱۹^{۲} + ۸^{۲}}}$$

کو زاویہ ا ج ب کا اندرونی ناصف ہونا چاہیے کیونکہ اس مساوات کے دونوں ارکان مثبت ہونے چاہییں یا دونوں منفی اور اس لیے ناصف پر کا کوئی نقطہ ج ا اور ج ب دونوں کی مثبت جانب یا دونوں کی منفی جانب ہونا چاہیے۔

اسی طرح $$\frac{۱۹\text{لا} - ۸\text{ما} - ۳}{\sqrt{۱۹^{۲} + ۸^{۲}}} = \pm \frac{-\text{لا} + ۴\text{ما} - ۷}{\sqrt{۱^{۲} + ۴^{۲}}}$$

زاویہ ب ا ج کا اندرونی ناصف ہے۔

پس اندرونی دائرہ کا مرکز مساواتوں

$$\frac{-۱۳\text{لا} - ۱۶\text{ما} + ۴۵۳}{۵\sqrt{۱۷}} = \frac{۱۹\text{لا} - ۸\text{ما} - ۳}{۵\sqrt{۱۷}} = \frac{-\text{لا} + ۴\text{ما} - ۷}{\sqrt{۱۷}}$$

سے حاصل ہوگا چنانچہ یہ نقطہ (۱۱، ۵) ہے۔

۴۳ — دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا۔

مطلوبہ مساوات کو حاصل کرنے کا سب سے واضح طریقہ یہ ہے کہ دیے ہوئے خطِ مستقیم کا نقطۂ تقاطع (لاَ، ماَ) معلوم کیا جائے اور پھر شکل ما - ماَ = م (لا - لاَ) استعمال کی جائے جو نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرنے والے کسی (۳۸)
خطِ مستقیم کی مساوات کی شکل ہے۔ لیکن حسبِ ذیل طریقہ بعض اوقات قابلِ ترجیح قرار پاتا ہے۔

فرض کرو کہ دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

$$\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = ۰، \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\text{اَ لا} + \text{بَ ما} + \text{جَ} = ۰، \quad \ldots\ldots (۲)$$

ہیں۔ اب مساوات

$$\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} + \text{لہ}(\text{اَ لا} + \text{بَ ما} + \text{جَ}) = ۰، \quad \ldots\ldots (۳)$$

پر غور کرو - یہ ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے کیونکہ وہ پہلے درجہ کی مساوات ہے، نیز اگر (لاَ ، ماَ) وہ نقطہ ہو جو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم میں مشترک ہے تو حاصل ہونا چاہیے

ا لاَ + ب ماَ + ج = ۰ ،

اَ لاَ + بَ ماَ + جَ = ۰ ،

اور اس لیے ا لاَ + ب ماَ + ج + لہ (اَ لاَ + بَ ماَ + جَ) = ۰

اس آخری مساوات سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ (لاَ ، ماَ) خط (۳) پر بھی ہے -

پس (۳) ایک ایسے خطِ مستقیم کی مساوات ہے جو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرتا ہے - نیز لہ کو موزوں قیمت دینے سے یہ مساوات کسی دوسری شرط کو بھی پوری کر سکتی ہے، مثلاً وہ کسی دوسرے دیے ہوئے نقطہ میں سے گذرنے والے خط کو تعبیر کر سکتی ہے - اس لیے مساوات (۳)، لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے، اُن تمام خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو (۱) اور (۲) کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتے ہیں -

مثال - اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو مبدا، کو خطوط ۲ لا + ۵ ما - ۴ = ۰ اور ۳ لا - ۲ ما + ۲ = ۰ کے نقطہ تقاطع سے ملاتا ہے -

کوئی خط جو نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے

۲ لا + ۵ ما - ۴ + لہ (۳ لا - ۲ ما + ۲) = ۰

سے حاصل ہوتا ہے - یہ نقطہ (۰ ، ۰) میں سے گذریگا اگر

- ۴ + ۲ لہ = ۰ یا لہ = ۲

∴ ۲ لا + ۵ ما - ۴ + ۲ (۳ لا - ۲ ما + ۲) = ۰

یا ۸ لا + ما = ۰

مطلوبہ مساوات ہے -

۳۴ - اگر تین خطوطِ مستقیم کی مساواتیں علی الترتیب (۳۹)

ا لا + ب ما + ج = ۰ ، اَ لا + بَ ما + جَ = ۰ ، اً لا + بً ما + جً = ۰

ہوں اور اگر ہم تین مستقلات لہ، مہ، نہ معلوم کر سکیں ایسے کہ بشتہ
لہ (ا لا + ب ما + ج) + مہ (ا′ لا + ب′ ما + ج′) + نہ (ا″ لا + ب″ ما + ج″) = ۰،
(۱) ....
متماثلاً درست ہو یعنے لا اور ما کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہو تو تین خطوطِ مستقیم ایک نقطہ پر ملیں گے - کیونکہ اگر کسی نقطہ کے محدد خطوں کی کسی دو مساواتوں کو پورا کرتے ہوں تو رشتہ (۱) سے یہ ظاہر ہے کہ یہ محدد تیسری مساوات کو بھی پورا کریں گے -

یہ اصول اکثر استعمال کیا جاتا ہے -

مثال - وہ تین خطوطِ مستقیم جو ایک مثلث کے راسوں کو مقابل کے ضلعوں کے نقاطِ وسطی سے ملاتے ہیں ایک نقطہ پر ملتے ہیں -

فرض کرو کہ راس ا، ب، ج علی الترتیب (لا′، ما′)، (لا″، ما″)، اور (لا‴، ما‴) ہیں - اب ب ج، ج ا، ا ب کے نقاطِ وسطی د، ع، ف علی الترتیب

((لا″ + لا‴)/۲ ، (ما″ + ما‴)/۲)، ((لا‴ + لا′)/۲ ، (ما‴ + ما′)/۲)، ((لا′ + لا″)/۲ ، (ما′ + ما″)/۲)

ہوں گے - اس لیے ا د کی مساوات

(ما − ما′) / ((ما″ + ما‴)/۲ − ما′) = (لا − لا′) / ((لا″ + لا‴)/۲ − لا′)، .... (۱)

یا ما (لا″ + لا‴ − ۲ لا′) − لا (ما″ + ما‴ − ۲ ما′) + لا′ (ما″ + ما‴) − ما′ (لا″ + لا‴) = ۰

ہو گی - اسی طرح ب ع، ج ف کی مساواتیں علی الترتیب

ما (لا‴ + لا′ − ۲ لا″) − لا (ما‴ + ما′ − ۲ ما″) + لا″ (ما‴ + ما′) − ما″ (لا‴ + لا′) = ۰،

اور ما (لا′ + لا″ − ۲ لا‴) − لا (ما′ + ما″ − ۲ ما‴) + لا‴ (ما′ + ما″) − ما‴ (لا′ + لا″) = ۰

ہوں گی -

اب چونکہ یہ تین مساواتیں متماثلاً معدوم ہوتی ہیں جبکہ انھیں باہم جمع کیا جاتا ہے

اِس لیے اِن سے تعبیر شدہ تین خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔
[(۱) میں اندراج کرنے سے آسانی کے ساتھ یہ معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ ث جس کے محدد $\frac{1}{3}$ (لَ + لً + لٍ)، $\frac{1}{3}$ (مَ + مً + مٍ) ہیں اد پر ہے اور اس نتیجہ کے تشاکل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ث، ب ع اور ج ف پر بھی ہے۔]

(۴۰)

مثالیں

۱ — وہ زاویے معلوم کرو جو خطوطِ مستقیم کے حسب ذیل زوجوں کے درمیان ہیں:

(۱) ما = ۲ لا + ۵ ، ۳ لا + ما = ۷

(۲) لا + ۲ ما - ۴ = ۰ ، ۲ لا - ما + ۱ = ۰

(۳) ا لا + ب ما + ج = ۰ ، (ا + ب) لا - (ا - ب) ما = ۰

جواب: (۱) °۴۵ ، (۲) °۹۰ ، (۳) °۴۵

۲ — اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو ۲ لا + ۷ ما - ۵ = ۰ پر عمود ہو اور نقطہ (۳، ۱) میں سے گذرے۔ جواب: ۷ لا - ۲ ما = ۱۹

۳ — اُن خطوں کی مساواتیں معلوم کرو جو مبداء میں سے گذریں اور خطوط ۳ لا + ۲ ما - ۵ = ۰ اور ۴ لا + ۳ ما - ۷ = ۰ پر عمود ہوں۔ اُن نقطوں کے محدد معلوم کرو جہاں یہ عمود خطوں سے ملتے ہیں اور ثابت کرو کہ اِن نقطوں کو ملانیوالے خط کی مساوات ۲۳ لا + ۱۱ ما - ۳۵ = ۰ ہے۔

۴ — خطوں ۴ لا + ۳ ما - ۷ = ۰، ۵ لا + ۱۲ ما - ۲۰ = ۰، اور ۳ لا + ۴ ما - ۸ = ۰ سے نقطہ (۲، ۳) کے عمودی فاصلے معلوم کرو۔ جواب: ۲

۵ — اُن خطوں کی مساواتیں معلوم کرو جو علی الترتیب نقاط (۱، ۱) اور (-۲، -۱) میں سے گذریں اور ۳ لا + ۴ ما + ۷ = ۰ کے متوازی ہوں۔ اِن خطوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کرو۔ جواب: $\frac{1۷}{۵}$

۶ — اُن دو خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۲، ۳) میں سے

گذریں اور لا + ۲ ما = ۰ کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنائیں۔

جواب: لا - ۳ ما + ۷ = ۰، ۳ لا + ما = ۹

۷ — اُن دو خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو لا + ۷ ما + ۲ = ۰ کے متوازی ہوں اور نقطہ (۱، -۱) سے اکائی فاصلہ پر واقع ہوں۔

جواب: لا + ۷ ما + ۶ ± ۵ √۲ = ۰

۸ — اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو مبداء کو لا - ۴ ما - ۷ = ۰ اور ما + ۲ لا - ۱ = ۰ کے نقطہ تقاطع سے ملاتا ہے۔

جواب: ۱۳ لا + ۱۱ ما = ۰

۹ — اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۱) کو ۳ لا + ۴ ما - ۲ = ۰ اور لا - ۲ ما + ۵ = ۰ کے نقطہ تقاطع سے ملاتا ہے۔

جواب: ۷ لا + ۲۶ ما = ۳۳

۱۰ — اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو ما - ۴ لا - ۱ = ۰ اور ۲ لا + ۵ ما - ۶ = ۰ کے نقطہ تقاطع میں سے گذرے اور ۳ ما + ۴ لا = ۰ پر عمود ہو۔

جواب: ۸۸ ما - ۶۶ لا = ۱۰۱

۱۱ — ایک مثلث کے راس (۲، ۱)، (۳، ۲) اور (-۱، -۱) ہیں۔ اِس مثلث کے اضلاع پر مبداء سے عمود کھینچے گئے ہیں۔ اِن عمودوں کے طول معلوم کرو۔

جواب: ۱/۵، ۱/۱۳ √۱۳، ۱/۲ √۲

۱۲ — اُن خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو خطوطِ مستقیم ۴ ما + ۳ لا - ۱۲ = ۰ اور ۳ ما + ۴ لا - ۲۴ = ۰ کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کریں، اور نیز وہ شکل کھینچو جو اِن چار خطوں کو تعبیر کرے۔

جواب: ما - لا + ۱۲ = ۰، ۷ ما + ۷ لا - ۳۶ = ۰

۱۳ — خطوط لا + ۳ ما - ۱۰ = ۰، لا + ۳ ما - ۲۰ = ۰، ۳ لا - ما + ۵ = ۰، ۳ لا - ما - ۵ = ۰ سے بنے ہوئے مستطیل کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ وہ نقطہ (۳/۲، ۹/۲) پر متقاطع ہوتے ہیں۔

۱۴ — خطوط ما - لا = ۰، ما + لا = ۰، لا - ج = ۰ سے بنے ہوئے

مثلث کا رقبہ معلوم کرو۔ جواب : $\text{ج}^{۲}$

۱۵ — ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جو خطوط ما - ۲لا = ۰، ما - ۳لا = ۰ اور ما = ۵لا + ۴ سے بنتا ہے $\frac{۴}{۳}$ ہے۔

۱۶ — اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جو خطوط ما = ۲لا + ۴، ۲ما + ۳لا = ۵، ما + لا + ۱ = ۰ سے بنے۔ جواب : $\frac{۳۳۸}{۲۱}$

۱۷ — ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جو خطوں ما = $\text{م}_{۱}$لا + $\text{ج}_{۱}$، ما = $\text{م}_{۲}$لا + $\text{ج}_{۲}$، لا = ۰ سے بنتا ہے

$$\frac{\frac{۱}{۲}\left(\text{ج}_{۱} - \text{ج}_{۲}\right)^{۲}}{\text{م}_{۲} - \text{م}_{۱}}$$

ہے۔

۱۸ — ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ جو خطوطِ مستقیم ما = $\text{م}_{۱}$لا + $\text{ج}_{۱}$، ما = $\text{م}_{۲}$لا + $\text{ج}_{۲}$، ما = $\text{م}_{۳}$لا + $\text{ج}_{۳}$ سے بنتا ہے

$$\frac{۱}{۲}\frac{\left(\text{ج}_{۲} - \text{ج}_{۳}\right)^{۲}}{\text{م}_{۲} - \text{م}_{۳}} + \frac{۱}{۲}\frac{\left(\text{ج}_{۳} - \text{ج}_{۱}\right)^{۲}}{\text{م}_{۳} - \text{م}_{۱}} + \frac{۱}{۲}\frac{\left(\text{ج}_{۱} - \text{ج}_{۲}\right)^{۲}}{\text{م}_{۱} - \text{م}_{۲}}$$

ہوگا۔ [مثال ۱۷ استعمال کرو]

۱۹ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم پر اس نقطہ سے کھینچے ہوئے عمودوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

۳۵ — ن ویں درجہ کی متجانس مساوات، مبداء میں سے گذرنے والے ن خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے گی۔

فرض کرو کہ مساوات

$$\text{ا}\,\text{ما}^{\text{ن}} + \text{ب}\,\text{ما}^{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ج}\,\text{ما}^{\text{ن}-۲}\,\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots + \text{ک}\,\text{لا}^{\text{ن}} = ۰، \ldots\ldots (۱)$$

ہے۔

$\text{لا}^{\text{ن}}$ سے تقسیم کرو تو

$$\text{ا}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}} + \text{ب}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}-۱} + \text{ج}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}-۲} + \cdots + \text{ک} = ۰ \quad \ldots (۲)$$

فرض کرو کہ اس مساوات کی اصلیں $\text{م}_۱$، $\text{م}_۲$، ...، $\text{م}_{\text{ن}}$ ہیں۔
تب مساوات بالا وہی ہے جو

$$\text{ا}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \text{م}_۱\right)\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \text{م}_۲\right)\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \text{م}_۳\right)\cdots\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \text{م}_{\text{ن}}\right) = ۰$$

ہے اور اِس لیے پوری ہوتی ہے جبکہ

$$\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \text{م}_۱ = ۰،\quad \frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \text{م}_۲ = ۰،\ \text{وغیرہ}$$

اور وہ کسی اور صورتوں میں پوری نہیں ہوتی۔

اِس لیے اُس طریق پر کے تمام نقطے جو (۱) سے تعبیر ہوتا ہے ن خطوطِ مستقیم

$$\text{ما} - \text{م}_۱\text{لا} = ۰،\quad \text{ما} - \text{م}_۲\text{لا} = ۰،\ \ldots،\ \text{ما} - \text{م}_{\text{ن}}\text{لا} = ۰$$

میں سے ایک یا دوسرے پر ہیں۔

۳۶ - دو خطوطِ مستقیم کے درمیان زاویہ معلوم کرنا جو مساوات $\text{ا}\,\text{لا}^۲ + ۲\text{ب}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ج}\,\text{ما}^۲ = ۰$ سے تعبیر ہوتے ہیں۔

اگر خطوط $\text{ما} - \text{م}_۱\text{لا} = ۰$، $\text{ما} - \text{م}_۲\text{لا} = ۰$ ہوں تو $(\text{ما} - \text{م}_۱\text{لا})(\text{ما} - \text{م}_۲\text{لا}) = ۰$
وہی ہے جو دی ہوئی مساوات

$$\text{ما}^۲ + \frac{۲\text{ب}}{\text{ج}}\,\text{لا}\,\text{ما} + \frac{\text{ا}}{\text{ج}}\,\text{لا}^۲ = ۰$$

ہے۔

$$\therefore\ \text{م}_۱ + \text{م}_۲ = -\frac{۲\text{ب}}{\text{ج}}، \quad \ldots\ldots (۱)$$

اور

$$\text{م}_۱\text{م}_۲ = \frac{\text{ا}}{\text{ج}}، \quad \ldots\ldots (۲)$$

اگر خطوط کے درمیان زاویہ طہ ہو تو

مس طہ = (م$_1$ + م$_2$) / (۱ + م$_1$ م$_2$) = ۲ √(ب^2 - اج) / (ا + ج) ، (۱) اور (۲) سے

اگر ب^2 - اج مثبت ہے تو خطوط حقیقی ہیں ، یہ خطوط منطبق ہونگے

اگر ب^2 - اج = ۰

اگر ب^2 - اج منفی ہے تو خطوط خیالی ہیں لیکن حقیقی نقطہ (۰، ۰) میں سے گذرتے ہیں۔

اگر ا + ج = ۰ تو خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہونگے

یعنے لا^2 اور ما^2 کے سروں کا مجموعہ صفر ہو تو خطوط علی القوائم ہوں گے۔

۲۷ — وہ شرط معلوم کرو کہ دوسرے درجہ کی عام مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کر سکے۔

دوسرے درجہ کی مساوات کی عام ترین شکل

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ، ..... (۱)

ہے۔ اگر یہ مساوات متماثلاً

(ل لا + م ما + ن) (لَ لا + مَ ما + نَ) = ۰ ، .... (۲)

کے معادل ہو تو (۱) اور (۲) میں سروں کو مساوی رکھنے سے

ل لَ = ا ، م مَ = ب ، ن نَ = ج ،

م نَ + مَ ن = ۲ ف ، ن لَ + نَ ل = ۲ گ ، ل مَ + لَ م = ۲ ھ

آخری تین رشتوں کو مسلسل ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے

۸ ف گ ھ = ۲ ل لَ م مَ ن نَ + ل لَ (مَ^{2} ن^2 + م^2 نَ^{2})

+ م مَ (نَ^{2} ل^2 + ن^2 لَ^{2}) + ن نَ (لَ^{2} م^2 + ل^2 مَ^{2}) ۔

= ۲ ا ب ج + ا (۴ ف^2 - ۲ ب ج) + ب (۴ گ^2 - ۲ ج ا)
+ ج (۴ ھ^2 - ۲ ا ب)

پس ا ب ج - ا ف^2 - ب گ^2 - ج ھ^2 + ۲ ف گ ھ = ۰ ، .... (۳)
مطلوبہ شرط ہے۔

اگر لا^2 اور ما^2 دونوں کے سر صفر نہ ہوں تو اوپر کے نتیجہ کو زیادہ آسانی سے اس طرح حاصل کیا جا سکتا ہے کہ مساوات کو لا یا ما میں دودرجی مساوات سمجھ کر حل کیا جائے۔

فرض کرو کہ ا صفر نہیں ہے تو اگر ہم مساوات کو لا میں دودرجی مساوات سمجھ کر حل کریں تو

ا لا + ھ ما + گ = ± √((ھ^2 - ا ب) ما^2 + ۲ (ھ گ - ا ف) ما + گ^2 - ا ج)

اب اس غرض کے لیے کہ یہ شکل ا لا + ب ما + ج = ۰ میں تحویل ہو سکے یہ ضروری اور کافی ہے کہ علامت جذر کے اندر کا جملہ کامل مربع ہو۔ اس کے لیے شرط

(ھ^2 - ا ب) (گ^2 - ا ج) = (ھ گ - ا ف)^2

ہے جس کو ا سے تقسیم کرنے کے بعد وہ شرط (۳) کے مماثل ہو جاتی ہے۔

۳۸ — اُن خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ، .. (۱)

اور ل لا + م ما = ۱ ، .... (۲)

کے مشترک نقطوں کو مبدا سے ملانے سے حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات (۱) کو مساوات (۲) کے ذریعہ دوسرے درجہ کی تجانس مساوات بناؤ تو حاصل ہوگا

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ (گ لا + ف ما) (ل لا + م ما) + ج (ل لا + م ما)^2 = ۰ ، .... (۳)

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

کیونکہ مساوات (۳) متجانس ہونے کی وجہ سے وہ مبدا میں گذرنیوالے خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے (دفعہ ۳۵)۔ یہ معلوم کرنے کے لیے کہ خطوط (۳)، خط (۲) سے کہاں متقاطع ہوتے ہیں (۳) میں ل لا + م ما = ۱ رکھو تو رشتہ (۱) پورا ہوگا جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ خطوط (۳)، (۱) اور (۲) کے مشترک نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔

مثال — وہ خطوط معلوم کرو جو

۲ لا² + ۲ لا ما - ۴ لا + ۱ = ۰ اور ۳ لا + ما - ۱ = ۰

کے نقاطِ تقاطع کو مبدا سے ملاتے ہیں۔

خطوں کی مساوات

۲ لا² + ۳ لا ما - ۴ لا (۳ لا + ما) + (۳ لا + ما)² = ۰

ہے۔ یہ مساوات

لا² - ما² - ۵ لا ما = ۰

میں تحویل ہوتی ہے۔ پس خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

۳۹* — اُن خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو دو خطوطِ مستقیم

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۰

کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کریں۔

اگر دیے ہوئے خطوط محور لا کے ساتھ زاویے طہ₁ اور طہ₂ بناتے ہیں تو

(ما - لا مس طہ₁) (ما - لا مس طہ₂) = ۰

وہی ہے جو دی ہوئی مساوات ہے۔ پس

مس طہ₁ + مس طہ₂ = - ۲ھ/ب ، .... (۱)

$$\text{مس ط}_1\ \text{مس ط}_2 = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \text{ ، } \ldots\ldots\ldots \ (\text{۲})$$

اگر ط وہ زاویہ ہو جو ناصفوں میں سے ایک، محور لا کے ساتھ بناتا ہے تو

$$\text{ط} = \frac{\text{ط}_1 + \text{ط}_2}{\text{۲}} \quad \text{یا} \quad \text{ط} = \frac{\text{ط}_1 + \text{ط}_2}{\text{۲}} + \frac{\pi}{\text{۲}}$$

اور ان میں سے کسی صورت میں

$$\text{مس ۲ط} = \text{مس}\ (\text{ط}_1 + \text{ط}_2)$$

یا

$$\frac{\text{۲ مس ط}}{\text{۱} - \text{مس}^2\ \text{ط}} = \frac{\text{مس ط}_1 + \text{مس ط}_2}{\text{۱} - \text{مس ط}_1\ \text{مس ط}_2}$$

(۴) اگر ایک ناصف پر (لا، ما) کوئی نقطہ ہو تو $\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{مس ط}$

اس لیے

$$\frac{\text{۲}\ \frac{\text{ما}}{\text{لا}}}{\text{۱} - \frac{\text{ما}^2}{\text{لا}^2}} = \frac{\text{مس ط}_1 + \text{مس ط}_2}{\text{۱} - \text{مس ط}_1\ \text{مس ط}_2}$$

اس لیے (۱) اور (۲) کو استعمال کرنے سے مطلوبہ مساوات

$$\frac{\text{۲ لا ما}}{\text{لا}^2 - \text{ما}^2} = \frac{\text{۲ ھ}}{\text{ا} - \text{ب}}$$

یا

$$\frac{\text{لا}^2 - \text{ما}^2}{\text{ا} - \text{ب}} = \frac{\text{لا ما}}{\text{ھ}} \text{ ، } \ldots\ldots\ldots \ (\text{۳})$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ دو خطوطِ مستقیم $\text{ما}^2 - \text{۲ لا ما قط ط} + \text{لا}^2 = \text{۰}$ ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ ط بناتے ہیں۔

۲ ـــ ثابت کرو کہ مساوات لا^۲ + لا ما - ۶ ما^۲ + ۷ لا + ۳۱ ما - ۱۸ = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے ۔ اِن کا درمیانی زاویہ معلوم کرو ۔ جواب : ۴۵°

۳ ـــ ثابت کرو کہ حسب ذیل مساواتوں میں سے ہر ایک، خطوطِ مستقیم کے ایک زوج کو تعبیر کرتی ہے ۔ ہر زوج کا درمیانی زاویہ بھی معلوم کرو ۔

(۱) (لا - لہ) (ما - لہ) = ۰، (۲) لا^۲ - ۴ ما^۲ = ۰،

(۳) لا ما = ۰، (۴) لا ما - ۲ لا - ۳ ما + ۶ = ۰،

(۵) لا^۲ - ۵ لا ما + ۴ ما^۲ = ۰، (۶) لا^۲ - ۵ لا ما + ۴ ما^۲ + ۳ لا - ۴ = ۰،

(۷) لا^۲ + ۲ لا ما جم ۲ عہ - ما^۲ = ۰

۴ ـــ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

۱۲ لا^۲ - ۱۰ لا ما + ۲ ما^۲ + ۱۱ لا - ۵ ما + لہ = ۰

دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے گی ؟ ثابت کرو کہ اگر یہ مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے تو اِن کا درمیانی زاویہ مس^-۱ ½ ہے جواب : لہ = ۲

۵ ـــ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

۱۲ لا^۲ + لہ لا ما + ۲ ما^۲ + ۱۱ لا - ۵ ما + ۲ = ۰

دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے گی ؟ جواب : - ۱۰ یا - ۳۵/۲

۶ ـــ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات

۱۲ لا^۲ + ۳۶ لا ما + لہ ما^۲ + ۶ لا + ۶ ما + ۳ = ۰

دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے گی ۔ یہ خطوط حقیقی ہیں یا خیالی ؟

جواب : ۲۸

مثال ۷ ـــ لہ کی کس قیمت کے لیے مساوات لہ لا ما + ۵ لا + ۳ ما + ۲ = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے گی ؟ جواب : لہ = ۱۵/۲

۸ ـــ ثابت کرو کہ وہ خطوط جو

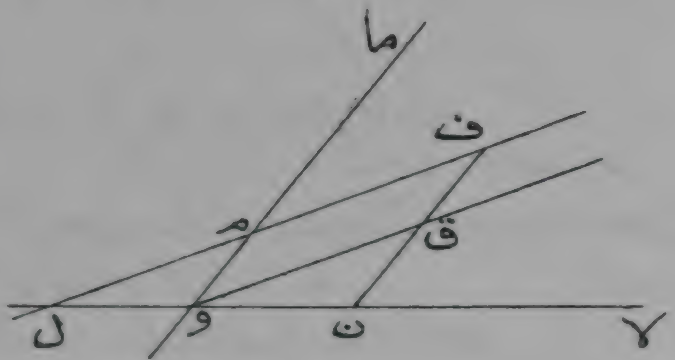
۳ لا^۲ + ۵ لا ما - ۳ ما^۲ + ۲ لا + ۳ ما = ۰ اور ۳ لا - ۲ ما = ۱

کے مشترک نقطوں کو مبدا سے ملاتے ہیں ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں ۔

خطوط ۳ لا^۲ + ۵ لا ما - ۳ ما^۲ + (۲ لا + ۳ ما) (۳ لا - ۲ ما) = ۰ ہیں ۔

مائل محاور

(۴۶) ۴۰ - خطِ مستقیم کی مساوات اُن محوروں کے حوالے سے معلوم کرنا جو ایک دوسرے سے زاویہ سہ پر مائل ہوں -



فرض کرو کہ ل م ف کوئی خطِ مستقیم ہے جو محوروں سے نقاط ل، م پر ملتا ہے -

فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ف کے محدد (لا، ما) ہیں -

ف ن کو محور ما کے متوازی اور و ق کو خط ل م ف کے متوازی کھینچو حسب شکل - تب

ن ف = ن ق + ق ف، . . . . (۱)

لیکن $\frac{\text{ن ق}}{\text{و ن}} = \frac{\text{جب ن و ق}}{\text{جب (سہ - ن و ق)}} =$ مستقل = م (فرض کرو)

اور ق ف = و م = مستقل = ج (فرض کرو)

اس لیے (۱) ہو جاتا ہے ما = م لا + ج جو مطلوبہ مساوات ہے -

اگر طہ وہ زاویہ ہو جو خط محور لا کے ساتھ بناتا ہے تو

$$م = \frac{جب\ طہ}{جب\ (سہ - طہ)}$$

$$\therefore \quad مس\ طہ = \frac{م\ جب\ سہ}{۱ + م\ جم\ سہ}$$

۴۱ — دفعات ماسبق کے متعدد نتیجے درست رہتے ہیں خواہ محاور قائم ہوں یا مائل - اِن نتیجوں کو آسانی سے پہچان لیا جاسکتا ہے - (۴۷)

۴۲*‌ — دو خطوطِ مستقیم کی مساواتیں، زاویہ سہ پر مائل محوروں کے حوالے سے، دی گئی ہیں - اِن کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا -

اگر خطوں کی مساواتیں

$$ما = م\ لا + ج\ ،\quad ما = مَ\ لا + جَ$$

ہوں اور اگر طہ اور طہَ وہ زاویے ہوں جو وہ علی الترتیب محور لا کے ساتھ بناتے ہیں تو (دفعہ ۴۰)

$$مس\ طہ = \frac{م\ جب\ سہ}{۱ + م\ جم\ سہ}\ \text{اور}\ مس\ طہَ = \frac{مَ\ جب\ سہ}{۱ + مَ\ جم\ سہ}$$

$$اس\ لیے\quad مس\ (طہ - طہَ) = \frac{(م - مَ)\ جب\ سہ}{۱ + (م + مَ)\ جم\ سہ + م\ مَ}\ ، \ldots\ldots (۱)$$

یا خطوں کا درمیانی زاویہ

$$مس^{-۱}\ \frac{(م - مَ)\ جب\ سہ}{۱ + (م + مَ)\ جم\ سہ + م\ مَ}$$

ہے -

یہ خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں گے اگر

$$۱ + (م + مَ)\ جم\ سہ + م\ مَ = ۰\ ، \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اگر خطوطِ مستقیم کی مساواتیں

ا لا + ب ما + ج = ۰ ، اَ لا + بَ ما + جَ = ۰

ہوں اور اِن کے درمیان زاویہ ط ہو تو م = - ا/ب اور مَ = - اَ/بَ اور اسلئے اِن قیمتوں کو (۱) میں درج کرنے سے

مس ط = - (ا بَ - اَ ب) جب سہ / (ا اَ + ب بَ - (ا بَ + اَ ب) جم سہ)

یہ خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہونگے اگر

ا اَ + ب بَ - (ا بَ + اَ ب) جم سہ = ۰ ، ...... (۳)

پس کوئی خط جو ا لا + ب ما + ج = ۰ پر عمود ہے اُس کی مساوات

(ب - ا جم سہ) لا - (ا - ب جم سہ) ما = مستقل

ہے - بالخصوص خطوط لا + ما جم سہ = ۰ اور ما + لا جم سہ = ۰ ، علی الترتیب محوروں ما = ۰ اور لا = ۰ کے عمود وار ہیں -

(۴۸) **۴۳*- خط ا لا + ب ما + ج = ۰**

سے کسی نقطہ (لا، ما) کا عمودی فاصلہ معلوم کرنا -

فرض کرو کہ خط محاور لا اور ما کو علی الترتیب نقاط ک اور ل پر قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدد لا، ما ہیں اور ف ن وہ عمود ہے جو اس سے خط ل ک پر کھینچا گیا ہے - تب

△ف ل ک = △ف ل و + △ف و ک - △ل و ک ، ... (۱)

∴ ف ن × ل ک = و ل × لا جب سہ + و ک × ما جب سہ - و ک × و ل

× جب سہ .... (۲)

اگر ہم مثلث کے رقبہ کی علامت کے لحاظ سے کوئی قرارداد اختیار نہ کریں تو نقطہ اور خط کے مختلف محلوں کے لیے رشتہ (۱) میں ترمیم کرنی ہوگی، لیکن مساوات (۲) ہر صورت میں درست رہتی ہے - طالب علم کو

چاہیے کہ مختلف شکلیں کھینچ کر اس بیان کی صداقت کا بطور خود یقین کرلے۔

اب $وک = -\frac{ج}{ا}$ ، $ول = -\frac{ج}{ب}$

نیز $لک^2 = وک^2 + ول^2 - ۲ وک \times ول$ جم سہ

$= \frac{ج^2}{ا^2 ب^2} (ا^2 + ب^2 - ۲ اب$ جم سہ$)$

∴ (۲) سے

$$ف ن = \frac{ا لا_1 + ب ما_1 + ج}{\sqrt{ا^2 + ب^2 - ۲ اب \text{ جم سہ}}} \text{ جب سہ}$$

دوسرا طریقہ

اُس خط کی مساوات جو نقطہ ف ($لا_1$ ، $ما_1$) میں سے گذرتا ہے اور خط $ا لا + ب ما + ج = ۰$ پر عمود ہے

$(ب - ا \text{ جم سہ})(لا - لا_1) - (ا - ب \text{ جم سہ})(ما - ما_1) = ۰$

ہے۔ فرض کرو کہ عمود کے پائیں ن کے محدد $لا_2$ ، $ما_2$ ہیں، پس ن دونوں خطوں پر ہے اور اس لیے

$(ب - ا \text{ جم سہ})(لا_2 - لا_1) - (ا - ب \text{ جم سہ})(ما_2 - ما_1) = ۰$ ، ..... (۱)

اور $ا لا_2 + ب ما_2 + ج = ۰$ جس کو لکھا جا سکتا ہے

$ا \text{ جب سہ} (لا_2 - لا_1) + ب \text{ جب سہ} (ما_2 - ما_1) = - \text{جب سہ} (ا لا_1 + ب ما_1 + ج)$ ، .... (۲)

(۱) اور (۲) کا مربع لیکر جمع کرنے سے

$$(ا^2 + ب^2 - ۲ اب \text{ جم سہ})\{(لا_2 - لا_1)^2 + (ما_2 - ما_1)^2 + ۲ (لا_2 - لا_1)(ما_2 - ما_1) \text{ جم سہ}\}$$
$$= \text{جب}^2 \text{ سہ} (ا لا_1 + ب ما_1 + ج)^2$$

پس $\text{ن ف} = \dfrac{\text{ا لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - ۲\,\text{ا ب جم سہ}}}\ \text{جب سہ}$

۴۴* — خطوط

$$\text{ا لا}^2 + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 = ۰$$

کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا جبکہ محاور زاویہ سہ پر مائل ہوں۔

اگر خطوط $\text{ما} = \text{مَ لا}$، اور $\text{ما} = \text{مً لا}$

ہوں تو $\text{مَ} + \text{مً} = -\dfrac{۲\,\text{ھ}}{\text{ب}}$

اور $\text{مَ مً} = \dfrac{\text{ا}}{\text{ب}}$

اس لیے $\text{مَ} - \text{مً} = \dfrac{۲\sqrt{\text{ھ}^2 - \text{اب}}}{\text{ب}}$

لیکن $\text{م} = \text{مَ لا}$ اور $\text{ما} = \text{مً لا}$ کا درمیانی زاویہ

$$\text{مس}^{-1}\,\dfrac{(\text{مَ} - \text{مً})\ \text{جب سہ}}{۱ + (\text{مَ} + \text{مً})\ \text{جم سہ} + \text{مَ مً}} \qquad [\text{دفعہ ۴۲}]$$

ہے، اس لیے مطلوبہ زاویہ

$$\text{مس}^{-1}\,\dfrac{۲\sqrt{\text{ھ}^2 - \text{اب}} \times \text{جب سہ}}{\text{ب} - ۲\,\text{ھ جم سہ} + \text{ا}}$$ ہے۔

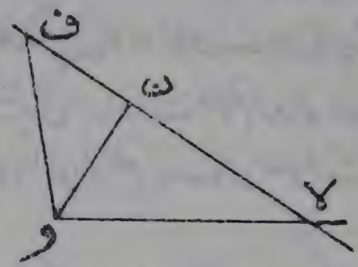
خطوط $\text{ا لا}^2 + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 = ۰$ ایک دوسرے کے علی القوائم ہونگے اگر

$$\text{ا} + \text{ب} - ۲\,\text{ھ جم سہ} = ۰$$

قطبی محدد

۴۵ — خطِ مستقیم کی قطبی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ مبدا سے دیے ہوئے خط پر عمود و ن ہے اور فرض کرو کہ و ن = ع اور لا و ن = عہ ۔
فرض کرو کہ خط پر کوئی نقطہ ف ہے اور اس کے محدد ر، طہ ہیں ۔



تب شکل میں زاویہ ن و ف ، (طہ ۔ عہ) ہے اور

و ف جم ن و ف = و ن

اس لیے مطلوبہ مساوات

ر جم (طہ ۔ عہ) = ع

ہے ۔

اِس مساوات کو مساوات لا جم عہ + ما جب عہ = ع میں لا کی بجائے ر جم طہ اور ما کی بجائے ر جب طہ رکھکر بھی حاصل کیا جا سکتا ہے ۔

۴۶ ۔ دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گذرنے والے خط کی قطبی مساوات معلوم کرنا ۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطے ف، ق اور اِن کے محدد علی الترتیب رَ، طَہ اور رً، طً ہیں ۔
فرض کرو کہ خط پر کوئی نقطہ س ہے اور اِس کے محدد ر، طہ ہیں ۔
اب چونکہ

△ ف و ق + △ ق و س ۔ △ ف و س = ۰

اس لیے رَ رً جب (طً ۔ طَ) + رً ر جب (طہ ۔ طً) ۔ ر رَ جب (طہ ۔ طَ) = ۰

اِس لیے مطلوبہ مساوات

ر رَ جب (طً - طَ) + رً ر جب (طہ - طً) + ر رَ جب (طَہ - طہ) = ۰
ہے۔

مثالیں

۱ ــ ثابت کرو کہ وہ خطوط جو مساوات ما۲ - لا۲ = ۰ سے حاصل ہوتے ہیں ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں خواہ محاور کے درمیان زاویہ کچھ ہی ہو ۔

۲ ــ اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱ ، ۲) میں سے گذرے اور خط لا + ۲ ما = ۰ کو علی القوائم قطع کرے ، یہ معلوم ہے کہ محوروں کا درمیانی زاویہ ۶۰° ہے۔

جواب : لا = ۱

۳ ــ وہ زاویہ معلوم کرو جو خط ما = ۵ لا + ۶ محور لا کے ساتھ بناتا ہے جبکہ محاور ایک ایسے زاویہ پر مائل ہوں جس کی جیب التمام ۳/۵ ہے ۔

جواب : ۴۵°

۴ ــ اگر خطوط ما = م لا + ج اور ما = مَ لا + جَ ، محور لا کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں تو

م + مَ + ۲ م مَ جم سہ = ۰

۵ ــ اگر خطوط ا لا۲ + ۲ ب لا ما + ج ما۲ = ۰ ، محور لا کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں تو ب = ا جم سہ ۔

۶ ــ ثابت کرو کہ وہ خطوط جو مساوات

لا۲ + ۲ لا ما جم سہ + ما۲ جم ۲ سہ = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں ، محاور زاویہ سہ پر مائل ہیں ۔

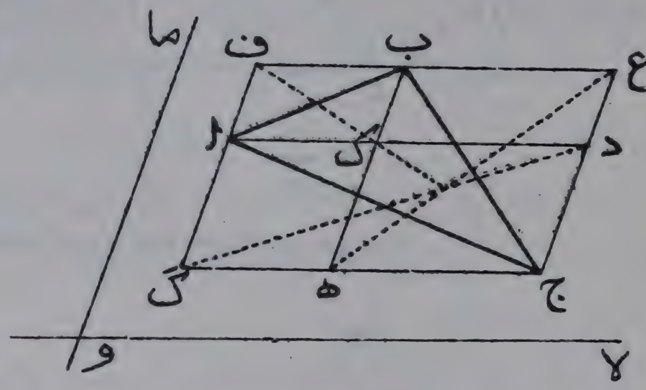
۷ ــ اُس خط پر جو نقطوں (ر۱ ، طہ۱) اور (ر۲ ، طہ۲) کو ملاتا ہے قطب سے عمود کھینچا گیا ہے ۔ اِس عمود کے پائین کے قطبی محدد معلوم کرو ۔

۵۱) ۴۷ ــ حسب ذیل مثالوں سے اہم امور کی توضیح ہوتی ہے :-

(۱) ایک مثلث کے اضلاع پر انہیں وتر مان کر متوازی الاضلاع کھینچے گئے ہیں جن کے ضلعے دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کے

متوازی ہیں ۔ ثابت کرو کہ اِن متوازی الاضلاعوں کے دوسرے وتر ایک نقطہ پر ملیں گے ۔

متوازی الاضلاعوں کے اضلاع کے متوازی کسی دو خطوں کو محاور فرض کرو۔ فرض کرو کہ مثلث کے راسوں ا، ب، ج کے محدد علی الترتیب (لاَ، ماَ) (لاً، ماً)، (لاًَ، ماًَ) ہیں



اب اس متوازی الاضلاع پر غور کرو جس کا ایک وتر ا ب ہے۔ اس کے دوسرے وتر کے سرے (لاَ، ماً) اور (لاً، ماَ) ہیں ۔

اس لیے وتر ف ک کی مساوات

(ما − ماَ) / (ماَ − ماً) = (لا − لاَ) / (لاً − لاَ)

ہوگی یا

لا(ماَ − ماً) + ما(لاَ − لاً) + لاً ماَ − لاَ ماَ = ۰

اسی طرح ھ ع کی مساوات

لا(ماً − ماًَ) + ما(لاًَ − لاً) + لاً ماً − لاًَ ماً = ۰

اور گ د کی مساوات

لا(ماًَ − ماَ) + ما(لاَ − لاًَ) + لاَ ماَ − لاًَ ماًَ = ۰

ہوگی ۔

اِن تین مساواتوں کا مجموعہ متماثلاً معدوم ہوتا ہے اس لیے یہ تین خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں ۔ [دفعہ ۳۴]

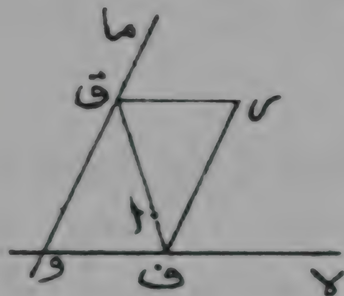
(۲) ایک ثابت نقطہ ا میں سے کوئی خطِ مستقیم کھینچا گیا ہے جو دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم و لا، و ما کو علی الترتیب نقطوں ف، ق پر قطع کرتا ہے۔ متوازی الاضلاع و ف س ق کی تکمیل کی گئی ہے ۔ س کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

دیے ہوئے دو خطوں کو محاور تسلیم کرو اور فرض کرو کہ ا کے محدد ف، گ ہیں

(۵۲) فرض کرو کہ ف ق کی مساوات، اس کے ممکنہ محلوں میں سے کسی ایک میں،

$$\frac{لا}{عہ} + \frac{ما}{بہ} = ۱، \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے۔ تب نقطہ س کے محدد عہ اور بہ ہوں گے ۔



لیکن چونکہ خط ف ق نقطہ (ف، گ) میں سے گذرتا ہے اس لیے قیمتیں لا = ف، ما = گ مساوات (۱) کو پورا کرتی ہیں ۔ اس لیے

$$\frac{ف}{عہ} + \frac{گ}{بہ} = ۱، \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

پس نقطہ س کے محدد عہ اور بہ، رشتہ (۲) کو ہمیشہ پورا کرتے ہیں۔ نقطہ س کے محددوں کو عہ اور بہ کی بجائے لا اور ما کہنے سے اسکے طریق کی مساوات

$$\frac{ف}{لا} + \frac{گ}{ما} = ۱$$

معلوم ہوتی ہے۔

(۳) ایک ثابت نقطہ و میں سے کوئی خطِ مستقیم کھینچا گیا ہے جو دو دیے ہوئے متوازی خطوطِ مستقیم کو علی الترتیب نقطوں ف اور ق پر قطع کرتا ہے۔ ف اور ق میں سے خطوطِ مستقیم مستقل سمتوں میں کھینچے گئے ہیں جو نقطہ ر پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ر کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

ثابت نقطہ و کو مبدا اور محور ما کو متوازی خطوطِ مستقیم کے متوازی لو۔ فرض کرو کہ اِن متوازی خطوطِ مستقیم کی مساواتیں لا = ا، لا = ب ہیں۔

اب اگر و ف ق کی مساوات ما = م لا ہو تو ف کا فصلہ ا اور اس لیے اِس کے معین کی قیمت م ا ہے۔ نیز ق کا فصلہ ب اور اِس لیے اِس کا معین م ب ہے۔

فرض کرو کہ ف ر ہمیشہ خط ما = مَ لا کے متوازی ہے اور ق ر ہمیشہ ما = مً لا کے متوازی ہے تو ف ر کی مساوات

ما ـ م ا = مَ (لا ـ ا)، .... (۱)

اور ق ر کی مساوات

ما ـ م ب = مً (لا ـ ب)، .... (۲)

ہو گی۔

(۵۳) نقطہ ر پر رشتے (۱) اور (۲) دونوں پورے ہوں گے اور ہم م کی کسی مخصوص قیمت کے جواب میں ر کے محددوں کو ہم ذات مساواتیں (۱) اور (۲) کے حل کرنے سے معلوم کر سکیں گے۔ لیکن ہمارا مقصود یہ نہیں ہے۔ ہمیں تو وہ جبری رشتہ مطلوب ہے جو نقطہ ر کے محددوں (لا، ما) سے پورا ہوتا ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ اِس رشتہ کو معلوم کرنے کے لیے مساواتوں (۱) اور (۲) سے م کو صرف ساقط کرنا ہو گا۔ چنانچہ نتیجہ حاصل ہو گا۔

(ب ـ ا) ما = مَ ب (لا ـ ا) ـ مً ا (لا ـ ب)

یہ مساوات پہلے درجہ کی ہے اور اس لیے مطلوبہ طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

(۴) ایک مثلث کے راس دیے گئے ہیں۔ اس کے اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکز معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ راسوں ا، ب، ج کے محدد علی الترتیب (لاَ، ماَ)، (لاً، ماً)، (لاًّ، ماًّ) ہیں۔ ب ج کی مساوات

ما (لاً - لاًّ) - لا (ماً - ماًّ) + ماً لاًّ - لاً ماًّ = ۰، .... (۱)

ہے، ج ا کی مساوات

ما (لاًّ - لاَ) - لا (ماًّ - ماَ) + ماًّ لاَ - لاًّ ماَ = ۰، .... (۲)

ہے، اور ا ب کی مساوات

ما (لاَ - لاً) - لا (ماَ - ماً) + ماَ لاً - لاَ ماً = ۰، .... (۳)

ہے۔

مذکورہ دائروں میں سے کسی ایک کے مرکز سے اِن خطوں پر عمود مقدار میں مساوی ہیں۔ اس لیے اِن چار دائروں کے مرکز مساواتوں

± [ما (لاً - لاًّ) - لا (ماً - ماًّ) + ماً لاًّ - لاً ماًّ] ÷ √[(لاً - لاًّ)² + (ماً - ماًّ)²]

= ± [ما (لاًّ - لاَ) - لا (ماًّ - ماَ) + ماًّ لاَ - لاًّ ماَ] ÷ √[(لاًّ - لاَ)² + (ماًّ - ماَ)²]

= ± [ما (لاَ - لاً) - لا (ماَ - ماً) + ماَ لاً - لاَ ماً] ÷ √[(لاَ - لاً)² + (ماَ - ماً)²] .... (۴)

سے حاصل ہوتے ہیں -
اگر مثلث کے راسوں ا، ب، ج کے محددوں کو مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) میں علی الترتیب درج کیا جائے تو اِن تین مساواتوں کے دائیں جانبی ارکان وہی ہوں گے - اس لیے (دفعہ ۲۶) مثلث کے راس سب کے سب یا تو خطوط (۱)، (۲)، (۳) کی مثبت جانبوں پر واقع ہوں گے یا سب کے سب منفی جانبوں پر -
اندرونی دائرہ کے مرکز سے مثلث کے ضلعوں پر عمود سب کے سب اُسی سمت میں کھنچے ہوتے ہیں جس میں مثلث کے راسوں سے ضلعوں پر عمود کھنچے گئے ہوں - پس (۴) میں تمام ابہامات کی علامتیں اندرونی دائرہ کے لیے مثبت ہیں -
جانبی دائروں کے لیے علامتیں علی الترتیب - + +، + - +، + + - ہیں -
یہ مشاہدہ طلب ہے کہ (۴) میں مندرجہ کسروں کے نسب نما مثلث (۵۴)
ا ب ج کے اضلاع ا، ب، ج ہیں -
اب اگر تمام ابہامات کی علامتوں کو مثبت لیا جائے یعنے اگر (لا، ما)
اندرونی مرکز (In-centre) ہو تو تینوں شمار کنندوں کا مجموعہ = ۲ △
اور تینوں نسب نماؤں کا مجموعہ = ا + ب + ج، کیونکہ لا اور ما کے ہر دو نوں مجموعوں میں صفر ہیں -

$$\text{پس ہر کسر} = \frac{\text{۲ } \triangle}{\text{ا + ب + ج}}$$

اب شمار کنندوں اور نسب نماؤں کو ترتیب وار لاَ، لاً، لاٌ سے ضرب دو اور جمع کرو تو ہر کسر

$$= \frac{\text{۲ } \triangle \times \text{لا}}{\text{ا لاَ + ب لاً + ج لاٌ}}$$

اس طرح لا(ا + ب + ج) = ا لاَ + ب لاً + ج لاٌ

اسی طرح ما(ا + ب + ج) = ا ماَ + ب ماً + ج ماٌ

اِن سے اندرونی مرکز کے محدد، اضلاع کے طولوں اور راسوں کے محددوں کی رقوم میں حاصل ہوتے ہیں۔

نوٹ ۔ اوپر کے نتیجہ کو ہم اس واقعہ سے بھی فوراً معلوم کر سکتے تھے کہ اندرونی مرکز ا، ب، ج پر کی تین کمیتوں کے لیے جو مقابل کے اضلاع کی متناسب ہوں "کمیت کا مرکز" ہے، اور یہ اس واقعہ سے مستنبط ہوتا ہے کہ وہ خط جو ہر راس کو اندرونی مرکز سے ملاتا ہے مقابل کے ضلع کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے درمیان نسبت اُس نسبت کا عکس ہوتی ہے جو اس کے سروں پر کی کمیتوں کے درمیان ہے۔

دوسرے باب پر مثالیں

۱ ۔ ایک خطِ مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت متقاطع خطوط پر اس کے مقطوعوں کے مکافیوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ خطِ مستقیم ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۲ ۔ ثابت کرو کہ مساوات $ب\,لا^{۲} - ۲ھ\,لا\,ما + ا\,ما^{۲} = ۰$ دو ایسے خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ جو علی الترتیب خطوطِ مستقیم $ا\,لا^{۲} + ۲ھ\,لا\,ما + ب\,ما^{۲} = ۰$ کے علی القوائم ہیں۔

۳ ۔ ن خطوں کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (ا، ب) میں سے گذریں اور مساوات

$$ب_{۰}\,ما^{ن} + ب_{۱}\,ما^{ن-۱}\,لا + ب_{۲}\,ما^{ن-۲}\,لا^{۲} + \dots + ب_{ن}\,لا^{ن} = ۰$$

سے تعبیر شدہ ن خطوں پر علی الترتیب عمود ہوں۔

۴ ۔ اُن خطوطِ مستقیم کے درمیانی زاویے معلوم کرو جو مساوات

$$لا^{۳} + ۳\,لا^{۲}\,ما - ۳\,لا\,ما^{۲} - ما^{۲} = ۰$$

سے تعبیر ہوتے ہیں۔

۵ ۔ و ا، و ب دو ثابت خطوطِ مستقیم ہیں اور ا، ب ثابت نقطے ہیں (۵۵)

اِن خطوں پر ف، ق کوئی دو نقطے ہیں ایسے کہ نسبت اف : ب ق مستقل ہے۔
ثابت کرو کہ ف ق کے وسطی نقطہ کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے ۔

۶ ــ اگر ایک خطِ مستقیم ایسا ہو کہ کئی ثابت نقطوں سے اِس پر کھینچے ہوے عمودوں کا مجموعہ صفر ہو تو ثابت کرو کہ یہ خطِ مستقیم ایک ثابت نقطہ میں سے گذریگا۔

۷ ــ ف م، ف ن وہ عمود ہیں جو ایک نقطہ ف سے دو ثابت خطوطِ مستقیم پر کھینچے گئے ہیں جو نقطہ و پر ملتے ہیں ۔ ن ق اور م ق کو اِن خطوطِ مستقیم کے متوازی کھینچا گیا ہے اور وہ نقطہ ق پر ملتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ اگر نقطہ ف کا طریق ایک خطِ مستقیم ہو تو نقطہ ق کا طریق بھی ایک خطِ مستقیم ہوگا ۔

۸ ــ ایک ثابت نقطہ و میں سے ایک خطِ مستقیم و ف ق کھینچا گیا ہے جو دو ثابت خطوطِ مستقیم سے نقاط ف، ق پر ملتا ہے ۔ خطِ مستقیم و ف ق میں ایک نقطہ ر ایسا لیا گیا ہے کہ و ف، و ر، و ق سلسلہ موسیقیہ میں ہیں ۔ ثابت کرو کہ ر کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے ۔

۹ ــ خطوں عہ = ۰، عہ = ج، عَہ = ۰، عَہ = ج
سے بنے ہوئے متوازی الاضلاع کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو جہاں

عہ ≡ لا جم عہ + ما جب عہ ـ ع،

اور عَہ ≡ لا جم عَہ + ما جب عَہ ـ عَ

۱۰ ــ اب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے ۔ ا کو قطب اور اب کو ابتدائی خط مان کر متوازی الاضلاع کے چار ضلعوں اور دو وتروں کی مساواتیں معلوم کرو ۔

۱۱ ــ ایک دیے ہوئے نقطہ (ھ، ک) سے محوروں پر عمود کھینچے گئے ہیں اور اِن عمودوں کے پائین کو ملایا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ (ھ، ک) سے اِس خط پر عمود کا طول

$$\frac{\text{ھ ک جب}^2\text{ سہ}}{\sqrt{\text{ھ}^2 + \text{ک}^2 + 2\,\text{ھ ک جم سہ}}}$$

ہے اور اس کی مساوات لا - ک ما = لا - ک ہے ۔

۱۲ ۔ دو خطوطِ مستقیم محددوں کے مبدا میں سے گذرتے ہیں، اِن میں سے ہر خط سے ایک نقطہ (لا، ما) کا فاصلہ ضہ ہے ۔ ثابت کرو کہ یہ دو خطوط مساوات

(لا ما - لا ما)^{۲} = ضہ^{۲} (لا^{۲} + ما^{۲})

سے حاصل ہوتے ہیں ۔

۱۳ ۔ دیے ہوئے خطوطِ مستقیم و لا، و ما پر دو ثابت نقطے ا، ب اور نیز کوئی دو نقطے ف، ق لیے گئے ہیں ایسے کہ و ف + و ق = و ا + و ب ثابت کرو کہ ا ق اور ب ف کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے ۔ (۵۶)

۱۴ ۔ ایک مربع کے ضلعوں کی مساواتیں معلوم کرو جس کے دو متقابلہ راسوں کے محدد ۳، ۴ اور ۱، -۱ ہیں ۔

۱۵ ۔ ایک مثلث کا قاعدہ اور قاعدے پر کے زاویوں کا فرق دیے گئے ہیں ۔ اس مثلث کے راس کے طریق کی مساوات معلوم کرو ۔

۱۶ ۔ ایک ایسے نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو کہ اس پر ایک ہی خطِ مستقیم کے دو دیے ہوئے حصوں کے محاذی مساوی زاویے بنیں ۔

۱۷ ۔ خطوں

لا جم طہ + ما جب طہ = ا، لا جم فہ + ما جب فہ = ا

ہر ایک نقطہ سے کھینچے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب، خط

$$\text{لا جم}\ \frac{\text{طہ + فہ}}{۲} + \text{ما جب}\ \frac{\text{طہ + فہ}}{۲} = \text{ا جم}\ \frac{\text{طہ - فہ}}{۲}$$

پر اُسی نقطہ سے کھینچے ہوئے عمود کے مربع کے مساوی ہے ۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کے طریق کی مساوات لا^{۲} + ما^{۲} = ا^{۲} ہے ۔

۱۸ ۔ ف ا، ف ب خطوطِ مستقیم ہیں جو ثابت نقطوں ا، ب میں سے گذرتے ہیں اور ایک دیے ہوئے خط پر مستقل طول قطع کرتے ہیں ۔ ف کے

طریق کی مساوات معلوم کرو -

۱۹ — ثابت کرو کہ اُس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو خطوطِ مستقیم ۳ لا + ۴ ما = $د_{۱}$، ۳ لا + ۴ ما = $د_{۲}$، ۴ لا + ۳ ما = $ب_{۱}$، اور ۴ لا + ۳ ما = $ب_{۲}$ سے بنتا ہے $\frac{۱}{۷}(د_{۱}-د_{۲})(ب_{۱}-ب_{۲})$ ہے -

۲۰ — ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جو خطوں $ا\,لا^{۲} + ۲\,ھ\,لا\,ما + ب\,ما^{۲} = ۰$ اور ل لا + م ما + ن = ۰ سے بنتا ہے

$$\frac{ن^{۲}\sqrt{ھ^{۲} - ا\,ب}}{ا\,م^{۲} - ۲\,ھ\,ل\,م + ب\,ل^{۲}}$$

ہے -

۲۱ — ثابت کرو کہ خطوں

$$ا\,لا^{۲} + ۲\,ھ\,لا\,ما + ب\,ما^{۲} = ۰$$

میں سے ایک، اور خطوں

$$ا\,لا^{۲} + ۲\,ھ\,لا\,ما + ب\,ما^{۲} + ل\,(لا^{۲} + ما^{۲}) = ۰$$

میں سے ایک کے درمیان جو زاویہ بنتا ہے وہ اُس زاویہ کے مساوی ہے جو نظام کے دوسرے دو خطوں کے درمیان ہے -

۲۲ — وہ شرط معلوم کرو کہ خطوں (۵۷)

$$ا\,لا^{۲} + ۲\,ھ\,لا\,ما + ب\,ما^{۲} = ۰$$

میں سے ایک، خطوں

$$اَ\,لا^{۲} + ۲\,ھَ\,لا\,ما + بَ\,ما^{۲} = ۰$$

میں سے ایک پر منطبق ہو سکے -

۲۳ — وہ شرط معلوم کرو کہ خطوں

$$ا\,لا^{۲} + ۲\,ھ\,لا\,ما + ب\,ما^{۲} = ۰$$

میں سے ایک، خطوں

$$اَ\,لا^{۲} + ۲\,ھَ\,لا\,ما + بَ\,ما^{۲} = ۰$$

میں سے ایک پر عمود ہو۔

۲۴ — ثابت کرو کہ نقطہ (۱، ۸) اس مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے جس کے اضلاع کی مساواتیں علی الترتیب

۳ لا + ۴ ما = ۰، ۱۲ ما − ۵ لا = ۰، ما − ۱۵ = ۰

ہیں۔

۲۵ — ثابت کرو کہ اس مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدد جس کے راس (۱، ۲)، (۲، ۳) اور (۳، ۱) ہیں ۱/۶ (۸ + √۱۰) اور ۱/۶ (۱۶ − √۱۰) ہیں۔ نیز جانبی دائروں کے مرکز معلوم کرو اور مختلف صور تو ں کا فرق دکھاؤ۔

۲۶ — اگر محاور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

(لا^۲ − ۳ ما^۲) لا = م ما (ما^۲ − ۳ لا^۲)

سے ایسے تین خطوط تعبیر ہوتے ہیں جو مبدا میں سے گذرتے ہیں اور ایک دوسرے کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

۲۷ — خطوط ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ۰ پر نقطہ (لاَ، ماَ) سے عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کا حاصل ضرب

(ا لاَ^۲ + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ^۲) ÷ √((ا − ب)^۲ + ۴ ھ^۲)

ہے

۲۸ — اگر نقطہ (لا، ما) سے خطوں ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ = ۰ پر عمود ع۱، ع۲ ہوں تو ثابت کرو کہ

(ع۱^۲ + ع۲^۲) {(ا − ب)^۲ + ۴ ھ^۲} = ۲ (ا − ب) (ا لا^۲ − ب ما^۲)
+ ۴ ھ (ا + ب) لا ما + ۴ ھ^۲ (لا^۲ + ما^۲)

۲۹ — اگر تین خطوطِ مستقیم

$$ا ما^۳ + ب ما^۲ لا + ج ما لا^۲ + د لا^۳ = ۰$$

ہر ایک نقطہ سے کھینچے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہو اور $ک^۲$ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق

$$ا ما^۳ + ب ما^۲ لا + ج ما لا^۲ + د لا^۳ - ک^۲ \sqrt{(ا - ج)^۲ + (ب - د)^۲} = ۰$$

ہے۔

۳۰ ـــ مساوات (۵۸)

$$ا لا^۳ + ۳ ب لا^۲ ما + ۳ ج لا ما^۲ + د ما^۳ = ۰$$

سے تعبیر شدہ تین خطوں میں سے دو خطوط علی القوائم ہوں گے اگر

$$ا^۲ + ۳ ا ج + ۳ ب د + د^۲ = ۰$$

۳۱ ـــ ثابت کرو کہ مساوات

$$ا (لا^۴ + ما^۴) - ۴ ب لا ما (لا^۲ - ما^۲) + ۶ ج لا^۲ ما^۲ = ۰$$

سے خطوطِ مستقیم کے ایسے دو زوج تعبیر ہوتے ہیں جو علی القوائم ہیں۔ نیز اگر $۲ ب^۲ = ا^۲ + ۳ ا ج$ تو یہ دو زوج منطبق ہوں گے ۔

۳۲ ـــ وہ ضروری اور کافی شرط کہ

$$ا ما^۴ + ب لا ما^۳ + ج لا^۲ ما^۲ + د لا^۳ ما + ع لا^۴ = ۰$$

سے تعبیر شدہ خطوطِ مستقیم میں سے دو علی القوائم ہوں یہ ہے کہ

$$(ب + د)(ا د + ب ع) + (ع - ا)^۲ (ا + ج + ع) = ۰$$

۳۳ ـــ دو منحنیوں

$$ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا = ۰$$

اور $$اَ لا^۲ + ۲ ھَ لا ما + بَ ما^۲ + ۲ گَ لا = ۰$$

کے نقاط تقاطع کو مبدا سے ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ ملانے والے خطوطِ مستقیم علی القوائم ہونگے اگر $گَ (ا + ب) = گ (اَ + بَ)$ ۔

۳۴ ـــ اگر ایک مثلث کے راسوں سے دوسرے مثلث کے اضلاع پر

کھنچے ہوئے عمود ایک نقطہ پر ملیں تو ثابت کرو کہ دوسرے مثلث کے راسوں سے پہلے مثلث کے اضلاع پر کھینچے ہوئے عمود بھی ایک نقطہ پر ملیں گے۔

۳۵ ۔ اگر ایک مثلث کے راس تین ہم نقطہ ثابت خطوطِ مستقیم پر واقع ہوں اور مثلث کے دو اضلاع ثابت نقطوں میں سے گذریں تو ثابت کرو کہ تیسرا ضلع بھی ایک ثابت نقطہ میں سے گذریگا۔

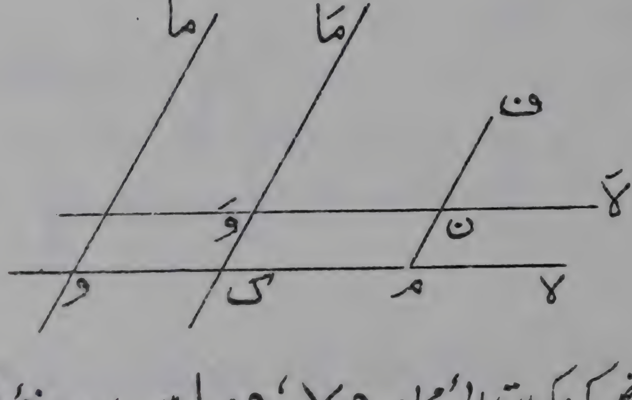
تیسرا باب

محوروں کی تبدیلی۔ غیر موسیقی نسبتیں یا چلیپی نسبتیں۔ دریپیچ (٥٩)

محوروں کی تبدیلی

٤٨ — جب ہمیں محوروں کے ایک جٹ کے حوالے سے ایک منحنی کی مساوات معلوم ہو تو ہم محوروں کے دوسرے جٹ کے حوالے سے اِس کی مساوات کو اخذ کر سکتے ہیں۔

٤٩ — محوروں کی سمت بدلے بغیر محددوں کے مبداء کو تبدیل کرنا۔



فرض کرو کہ ابتدائی محاور ولا، وما ہیں اور نئے محاور وَلاَ،

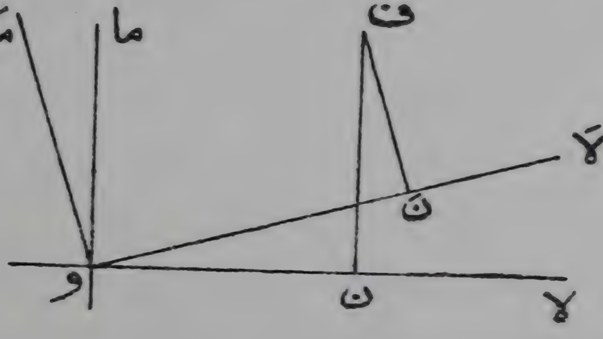
وَمَا جہاں وَلاَ، ولا کے متوازی اور وَمَا، وما کے متوازی ہے۔
فرض کرو کہ ابتدائی محوروں کے حوالے سے وَ کے محدد ھ، ک ہیں۔
فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدد ابتدائی محوروں کے حوالے سے لا، ما اور نئے محوروں کے حوالے سے لاَ، ماَ ہیں۔ ف م کو وما کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ ف م، ولا کو م پر اور وَلاَ کو ن پر قطع کرتا ہے۔

تب لا = وم = وک + ک م = وک + وَن = ھ + لاَ   (۶۰)

اور ما = م ف = م ن + ن ف = ک وَ + ن ف = ک + ماَ

پس کسی نقطہ کے ابتدائی محدد، نئے محددوں کی رقوم میں معلوم ہو چکے اور اگر ان قیمتوں کو دی ہوئی مساوات میں درج کیا جائے تو منحنی کی نئی مساوات حاصل ہوگی۔
اوپر کے بیان میں محاور قائم یا مائل ہو سکتے ہیں۔

۵۰ - مبداء کو بدلے بغیر محوروں کی سمت تبدیل کرنا جبکہ دونوں نظام قائم ہوں۔



فرض کرو کہ ابتدائی محاور ولا، وما ہیں اور نئے محاور ولاَ، وماَ۔ فرض کرو کہ زاویہ لا و لاَ = ط۔

فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدد ابتدائی محوروں کے حوالے سے لا، ما اور نئے محوروں کے حوالے سے لاَ، ماَ ہیں۔ ف ن کو و لا پر عمود اور ف نَ کو و لاَ پر عمود کھینچو۔

کسی خط پر و نَ اور نَ ف کے ظِلوں کا مجموعہ، اُس خط پر و ن اور ن ف کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

اب و لا اور و ما پر ظِل لو تو

لا = لاَ جم طہ + ماَ جم (طہ + π/۲)

اور ما = لاَ جم (طہ - π/۲) + ماَ جم طہ

یعنے لا = لاَ جم طہ - ماَ جب طہ

ما = لاَ جب طہ + ماَ جم طہ

پس کسی نقطہ کے ابتدائی محدد، نئے محددوں کی رقوم میں معلوم ہو چکے، (۶۱)
اور اگر اِن قیمتوں کو دی ہوئی مساوات میں درج کیا جائے تو منحنی کی نئی مساوات حاصل ہو گی۔

مثال ۱ - ایک منحنی کی مساوات ۳ لا² + ۲ لا ما + ۳ ما² - ۱۸ لا - ۲۲ ما + ۵۰ = ۰ ہے۔ نقطہ (۲، ۳) میں سے گذرنے والے قائم محاور کے حوالے سے یہ مساوات کیا ہو جائے گی جبکہ لا کا نیا محور پرانے محور کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بنائے۔

اول مبداء کو نقطہ (۲، ۳) پر منتقل کرو جس کے لیے لا، ما کی بجائے علی الترتیب لاَ + ۲، ماَ + ۳ رکھنا ہوگا چنانچہ نئی مساوات

۳ (لاَ + ۲)² + ۲ (لاَ + ۲) (ماَ + ۳) + ۳ (ماَ + ۳)² - ۱۸ (لاَ + ۲)
- ۲۲ (ماَ + ۳) + ۵۰ = ۰

ہو گی جو

۳ لاَ² + ۲ لاَ ماَ + ۳ ماَ² - ۱ = ۰

میں تحویل ہوتی ہے یا زبروں کو اڑا دیا جائے تو

۳ لا² + ۲ لا ما + ۳ ما² - ۱ = ۰ ...... (۱)

محوروں کو ۴۵° کے زاویہ میں سے گھمانے کے لیے لا کی بجائے لاَ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ - ماَ $\frac{1}{\sqrt{2}}$
اور ما کی بجائے لاَ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ + ماَ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ رکھنا چاہیے ۔ تب مساوات (۱)

۳ ((لاَ - ماَ) / √۲)² + ۲ ((لاَ - ماَ) / √۲) ((لاَ + ماَ) / √۲) + ۳ ((لاَ + ماَ) / √۲)² = ۱

ہو جائے گی جو ۴ لاَ² + ۲ ماَ² = ۱ میں تحویل ہوتی ہے ۔
پس مطلوبہ مساوات

۴ لا² + ۲ ما² = ۱

ہے ۔

مثال ۲ ــ مساوات لا² - ما² + ۲ لا + ۴ ما = ۰ کیا ہو جائیگی جبکہ مبدا کو نقطہ (-۱، ۲) پر منتقل کیا جائے؟ جواب: لا² - ما² + ۳ = ۰

مثال ۳ ــ ثابت کرو کہ مساوات ۶ لا² + ۵ لا ما - ۶ ما² - ۱۷ لا + ۷ ما + ۵ = ۰، ان محوروں کے حوالے سے جو ایک خاص نقطہ میں سے گذرتے ہیں اور ابتدائی محوروں کے متوازی ہیں ۶ لا² + ۵ لا ما - ۶ ما² = ۰ ہو جاتی ہے ۔
جواب: نقطہ (۱، ۱) ہے ۔

مثال ۴ ــ مساوات ۴ لا² + ۲ √۳ لا ما + ۲ ما² - ۱ = ۰ کیا ہو جائیگی جبکہ محوروں کو ۳۰° کے زاویہ میں سے گھما دیا جائے؟
جواب: ۵ لا² + ما² - ۱ = ۰

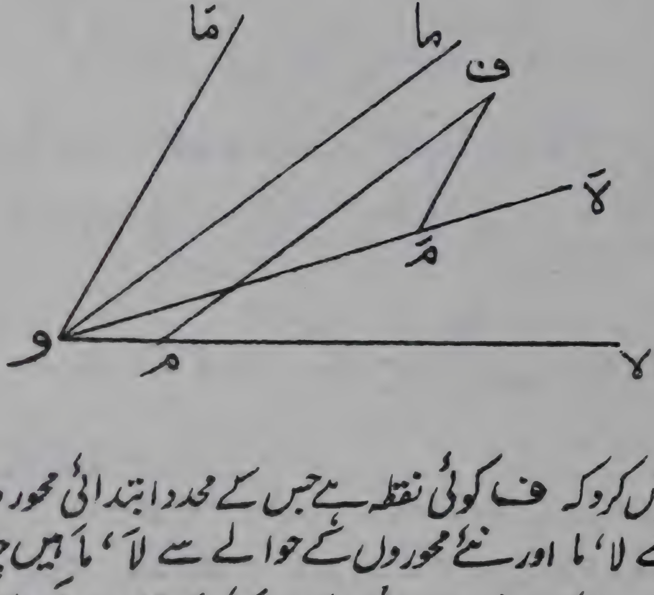
مثال ۵ ــ مساوات لا² - ۲ لا ما + ما² + لا - ۳ ما = ۰ کو ان محوروں کے حوالے سے معلوم کرو جو نقطہ (-۱، ۰) میں سے گذرتے ہیں اور ان خطوں کے متوازی ہیں جو ابتدائی محوروں کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں ۔
جواب: √۲ ما² - لا = ۰

مثال ۶ — مساوات لا^{2} + ۲ ج لا ما + ما^{2} = ا^{2} کو مستحیل کرو جبکہ قائم محوروں کو زاویہ $\frac{\pi}{4}$ میں سے گھمایا گیا ہو۔

جواب: (۱ + ج) لا^{2} + (۱ − ج) ما^{2} = ا^{2}

۵۱ — مبدا کو بدلے بغیر مائل محوروں کے ایک جٹ سے دوسرے جٹ میں تبدیل کرنا۔ (۶۲)

فرض کرو کہ و لا، و ما ابتدائی محاور ہیں جو زاویہ سہ پر مائل ہیں۔ فرض کرو کہ و لَا، و مَا نئے محاور ہیں جو زاویہ سَہ پر مائل ہیں۔ فرض کرو کہ زاویہ لا و لَا، ط کے مساوی ہے۔



فرض کرو کہ ف کوئی نقطہ ہے جس کے محدد ابتدائی محوروں کے حوالے سے لا، ما اور نئے محوروں کے حوالے سے لَا، مَا ہیں چنانچہ شکل میں و م = لا، م ف = ما، و مَ = لَا، مَ ف = مَا جہاں م ف،

وما کے متوازی اور مرف، ومَا کے متوازی ہے۔
کسی خط پر وم اور مرف کے ظلوں کا مجموعہ، اُس خط پر ومَ اور مَرف کے ظلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔
ایک ایسے خط پر ظل لو جو ولا پر عمود ہے، تب

ماجب سہ = لَاجم (طہ - π/۲) + مَاجم (طہ + سَہ - π/۲)

∴ ماجب سہ = لَاجب طہ + مَاجب (طہ + سَہ)

پھر ایک ایسے خط پر ظل لو جو وما پر عمود ہے، تب

لاجم (سہ + π/۲) = لَاجم (سہ + π/۲ - طہ) + مَاجم (سہ + π/۲ - طہ - سَہ)

∴ لاجب سہ = لَاجب (سہ - طہ) + مَاجب (سہ - سَہ - طہ)

یہ ضابطے شاذ ہی استعمال کئے جاتے ہیں۔ وہ نتیجے جو محوروں کی تبدیلی سے حاصل ہوتے ہیں بالعموم بالواسطہ معلوم کئے جاتے ہیں، جیساکہ حسب ذیل مثال میں کیا گیا ہے۔

۵۲* — اگر محوروں کی تبدیلی سے ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² (۶۳)
بدل کر اَ لَا² + ۲ ھَ لَا مَا + بَ مَا² ہو جائے تو ثابت کرو کہ

(ا + ب - ۲ ھ جم سہ) / جب² سہ = (اَ + بَ - ۲ ھَ جم سَہ) / جب² سَہ

جہاں سہ اور سَہ محوروں کے اِن دو جٹوں کے زوایائے میلان ہیں۔

اگر مبدا ا و ہو اور ف کوئی نقطہ ہو جس کے محدد ابتدائی محوروں کے حوالے سے لا، ما اور نئے محوروں کے حوالے سے لَا، مَا ہیں تو

وفَ² = لا² + ما² + ۲ لا ما جم سہ

نیز وفَ² = لاَ² + ماَ² + ۲ لاَ ماَ جم سہَ

پس لا² + ما² + ۲ لا ما جم سہ بدلکر لاَ² + ماَ² + ۲ لاَ ماَ جم سہَ ہو جاتا ہے۔ نیز بموجب فرض

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² بدلکر اَ لاَ² + ۲ ھَ لاَ ماَ + بَ ماَ²

ہوتا ہے۔ اِس لیے اگر لہ کوئی مستقل عدد ہو تو

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² + لہ (لا² + ۲ لا ما جم سہ + ما²)

بدلکر اَ لاَ² + ۲ ھَ لاَ ماَ + بَ ماَ² + لہ (لاَ² + ۲ لاَ ماَ جم سہَ + ماَ²)

ہو جائے گا۔ پس اگر لہ کو ایسا منتخب کیا جائے کہ ان میں سے ایک جملہ کامل مربع ہو تو دوسرا بھی لہ کی اُسی قیمت کے لیے کامل مربع ہو گا۔

جملہ اول کامل مربع ہو گا اگر

(ا + لہ) (ب + لہ) − (ھ + لہ جم سہ)² = ۰

اور جملہ دوم کامل مربع ہو گا اگر

(اَ + لہ) (بَ + لہ) − (ھَ + لہ جم سہَ)² = ۰

لہ کو معلوم کرنے کے لیے درجہ دوم کی یہ جو دو مساواتیں ہیں اِن کی اصلیں وہی ہونی چاہییں۔ اِن کو اشکال

لہ² جب² سہ + (ا + ب − ۲ ھ جم سہ) لہ + ا ب − ھ² = ۰

اور لہ² جب² سہَ + (اَ + بَ − ۲ ھَ جم سہَ) لہ + اَ بَ − ھَ² = ۰

میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

(ا + ب − ۲ ھ جم سہ) / جب² سہ = (اَ + بَ − ۲ ھَ جم سہَ) / جب² سہَ ، ...... (۱)

اور (ا ب − ھ²) / جب² سہ = (اَ بَ − ھَ²) / جب² سہَ ، ...... (۲)

اگر محوروں کے یہ دو جٹ علی القوائم ہوں تو یہ مساواتیں حسب ذیل سادہ شکلیں اختیار کرتی ہیں:

ا + ب = اَ + بَ ، ا ب ۔ ھ۲ = اَ بَ ۔ ھَ۲ ، .... (۳)

۵۲ ۔ محوروں کے کسی تغیر سے مساوات کا درجہ نہیں بدلتا۔

دفعات ۴۹ ، ۵۰ ، اور ۵۱ سے ہم دیکھتے ہیں کہ محوروں کو خواہ کسی طرح تبدیل کیا جائے نئی مساوات لا اور ما کی بجائے شکل

ل لاَ + م ماَ + ن اور لَ لاَ + مَ ماَ + نَ

کے جملوں کو درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے ۔ یہ جملے پہلے درجہ کے ہیں اور اس لیے ابتدائی مساوات میں لا اور ما کی بجائے یہ جملے درج کیے جائیں تو مساوات کے درجہ میں کوئی اضافہ نہیں ہوگا ۔ اسی طرح مساوات کا درجہ گھٹ نہیں سکتا کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو نئی مساوات سے پرانی مساوات پر عود کرنے سے درجہ میں اضافہ ہونا چاہئے ۔

مثال ۱ ۔ قائم محوروں کے حقیقی استحالہ سے ثابت کرو کہ اگر ا لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ بدلکر اَ لاَ۲ + ۲ ھَ لاَ ماَ + بَ ماَ۲ ہو جائے تو ا + ب = اَ + بَ اور

ھ۲ ۔ ا ب = ھَ۲ ۔ اَ بَ

مثال ۲ ۔ محوروں کے ایک جٹ سے دوسرے جٹ میں مستحیل کرنے کے لیے ضابطہ

لا = م لاَ + ن ماَ ، ما = مَ لاَ + نَ ماَ

ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{م^2 + مَ^2 - ۱}{ن^2 + نَ^2 - ۱} = \frac{م\ مَ}{ن\ نَ}$$

جبکہ دونوں جٹوں میں مبداء وہی ہو ۔

[لا۲ + ما۲ + ۲ لا ما جم سہ بدلکر لاَ۲ + ماَ۲ + ۲ لاَ ماَ جم سہَ ہوگا ۔ اسلیے

لا اور ما کی بجائے دئے ہوئے جملے درج کرو اور لا^{2} اور ما^{2} کے سرّوں کو اکائی کے مساوی رکھو اور پھر جم سہ کو ساقط کرو۔]

مثال ۳ ۔ اُن طریقوں (Loci) کی مساواتیں معلوم کرو جو

(ا لا + ب ما + ج)^{2} = (ا^{2} + ب^{2})

اور (ا لا + ب ما + ج) (ب لا ـ ا ما + د) = ا^{2} + ب^{2}

سے تعبیر ہوتے ہیں جبکہ عمودی خطوں ا لا + ب ما + ج = ۰ اور ب لا ـ ا ما + د = ۰ کو علی الترتیب لا اور ما کے محوروں کے طور پر لیا گیا ہو۔

جواب : ما^{2} ـ ا = ۰ ، لا ما ـ ا = ۰

مثال ۴ ۔ ثابت کرو کہ مساواتوں

ا لا + ب ما + ج = ۰ اور (ا لا + ب ما)^{2} ـ ۳ (ب لا ـ ا ما)^{2} = ۰

سے تعبیر شدہ خطوط ایک متساوی الاضلاع مثلث کے ضلع بناتے ہیں۔

[محوروں کو خطوں ا لا + ب ما = ۰ اور ب لا ـ ا ما = ۰ پر تبدیل کرو تو یہ مساواتیں

ما + ج / $\sqrt{}$(ا^{2} + ب^{2}) = ۰ اور ما^{2} ـ ۳ لا^{2} = ۰

ہو جائیں گی اور نتیجہ واضح ہے۔]

غیر موسیقی یا چلیپی نسبتیں

۵۴* ۔ ایک خطِ مستقیم پر نقطوں کے کسی جٹ کو سعت کہتے ہیں ، اور ایک نقطہ میں سے گذرنے والے خطوطِ مستقیم کے کسی جٹ کو پینسل کہتے ہیں ، اور اس کے ہر خط کو شعاع یا کرن کہتے ہیں۔

اگر ایک خطِ مستقیم پر ف ، ق ، ر ، س چار نقطے ہوں تو نسبت

$$\frac{\text{ف ق}}{\text{ق ر}} : \frac{\text{ف س}}{\text{س ر}}$$ یا ف ق × ر س : ف س × ر ق

کو سعت ف، ق، ر، س کی غیر موسیقی نسبت یا چلیپی نسبت کہا جاتا ہے اور اس کو {ف ق ر س} سے تعبیر کیا جاتا ہے۔
اگر ایک سعت کی چلیپی نسبت -۱ کے مساوی ہو تو اس کو موسیقی کہتے ہیں۔
یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر {ف ق ر س} = -۱ تو
ف ق : ف س = (ف ر - ف ق) : (ف س - ف ر)
اس لیے ف ق، ف ر، ف س سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔
اگر ف، ق، ر، س موسیقی سعت ہو تو ق، س کو ف، ر کے لحاظ سے موسیقی طور پر مزدوج کہا جاتا ہے۔

***۵۵ - اگر چار خطوطِ مستقیم و ف، و ق، و ر، و س کسی خطِ مستقیم سے علی الترتیب نقاط ف، ق، ر، س پر قطع ہوں تو سعت ف، ق، ر، س کی چلیپی نسبت مستقل ہوتی ہے۔**

فرض کرو کہ دئے ہوئے خطوں کی مساواتیں

$$ما = م_1 لا، ما = م_2 لا، ما = م_3 لا، ما = م_4 لا$$

ہیں۔
فرض کرو کہ قاطع خط ف ق ر س، مساوات ما = م لا + ک سے تعبیر ہوتا ہے۔ تب اگر محور لا پر ف، ق، ر، س کے ظِل ا، ب، ج، د ہوں تو مبداء سے اِن ظِلوں کے فاصلے علی الترتیب

$$\frac{ک}{م_1 - م}، \frac{ک}{م_2 - م}، \frac{ک}{م_3 - م}، \frac{ک}{م_4 - م}$$

ہوں گے۔ پس

$$\frac{\text{ف ق} \times \text{ر س}}{\text{ف س} \times \text{ر ق}} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ج د}}{\text{ا د} \times \text{ج ب}}$$

$$= \frac{\left\{\frac{\text{ک}}{\text{م}_۲ - \text{م}} - \frac{\text{ک}}{\text{م}_۱ - \text{م}}\right\}\left\{\frac{\text{ک}}{\text{م}_۴ - \text{م}} - \frac{\text{ک}}{\text{م}_۳ - \text{م}}\right\}}{\left\{\frac{\text{ک}}{\text{م}_۴ - \text{م}} - \frac{\text{ک}}{\text{م}_۱ - \text{م}}\right\}\left\{\frac{\text{ک}}{\text{م}_۲ - \text{م}} - \frac{\text{ک}}{\text{م}_۳ - \text{م}}\right\}}$$

$$= \frac{(\text{م}_۱ - \text{م}_۲)(\text{م}_۳ - \text{م}_۴)}{(\text{م}_۱ - \text{م}_۴)(\text{م}_۳ - \text{م}_۲)}$$

جو خط ف ق ر س کے محل پر منحصر نہیں ہے اور اس لیے مستقل ہے۔

چار خطوں کی پنسل کی چلیپی نسبت سے مراد اُس سمت کی چلیپی نسبت ہوتی ہے جس میں کسی دوسرے خط سے یہ پنسل منقطع ہوتی ہے۔

۵۶* ــ اُس پنسل کی چلیپی نسبت معلوم کرنا جو مساواتوں (۶۶)

$$\text{لا} = ۰،\quad \text{ما} - \text{م لا} = ۰،\quad \text{ما} = ۰،\quad \text{ما} - \text{مَ لا} = ۰$$

سے تعبیر شدہ خطوطِ مستقیم سے بنے۔

یہ گذشتہ مسئلہ کی مخصوص صورت ہے جبکہ $\text{م}_۱ = \infty$ اور $\text{م}_۴ = ۰$۔

یا

گذشتہ دفعہ کی بموجب پنسل کو کسی خط سے قطع کر کے چلیپی نسبت معلوم کیجا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ خط لا = ∞ پنسل کو قطع کرتا ہے، تب ما کی وہ قیمتیں جہاں یہ خط پنسل کے خطوں کو قطع کرتا ہے علی الترتیب

$$\infty،\quad \text{م}\,\infty،\quad ۰،\quad \text{مَ}\,\infty$$

ہیں - پس مطلوبہ جلیپی نسبت

$$\frac{\text{ه م}' \times \infty}{\text{ه م} \times \infty} = \frac{\text{م}'}{\text{م}}$$

ہے -

ظاہر ہے کہ خطوط

لا = ۰ ' ما - م لا = ۰ ' ما = ۰ ' ما - مَ لا = ۰

سے یہ موسیقی پنسل بنتی ہے

اگر محاور ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو خطوط ما - م لا = ۰ ' اور ما + م لا = ۰ دو محوروں میں سے کسی ایک سے مساوی زاوئے بناتے ہیں -

پس اگر کوئی پنسل موسیقی ہو اور دو متبادلہ کرنیں ایک دوسری کے علی القوائم ہوں تو یہ کرنیں دوسری دو کرنوں کے اندرونی اور بیرونی زاویوں کی تنصیف کریں گی -

۵۷* - ذوار بعۃ الاضلاع کے تین وتروں میں سے ہر وتر دوسرے دو وتروں سے موسیقی نسبت میں تقسیم ہوتا ہے -

فرض کرو کہ خطوطِ مستقیم ق ا ب ' ق د ج ' ف د ا ' اور ف ج ب ' ذوار بعۃ الاضلاع کے اضلاع ہیں - وہ خط جو اِن میں سے دو خطوں کے نقطہ تقاطع کو دوسرے دو خطوں کے نقطہ تقاطع سے ملاتا ہے ذوار بعۃ الاضلاع کا ایک وتر ہے - اس لیے تین وتر ہوتے ہیں یعنے ف ق ' ا ج ' ب د (شکل دیکھو)

ب ج اور ب ا کو علی الترتیب محاور لا اور ما فرض کرو -
فرض کرو کہ نقطوں ج ' ف ' ا ' ق کے محدد علی الترتیب

(لا۱، ۰)، (لا۲، ۰)، (۰، ما۱)، اور (۰، ما۲) ہیں۔

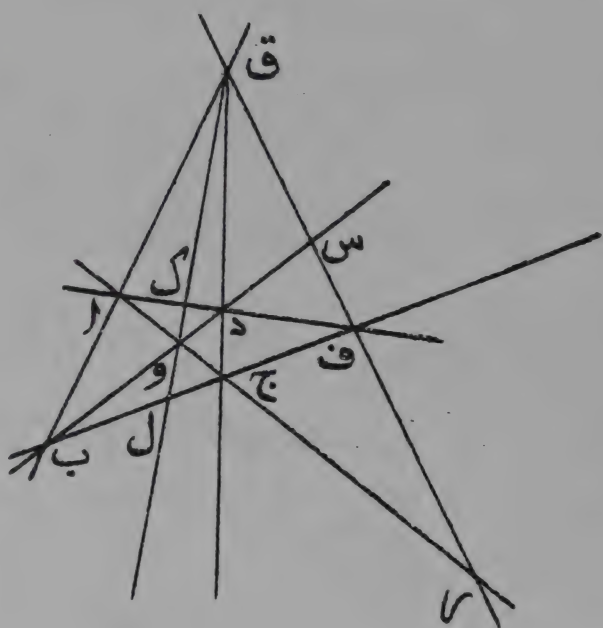
اب ج ا اور ف ق کی مساواتیں (۶۷)

$$\frac{\text{لا}}{\text{لا}_۱}+\frac{\text{ما}}{\text{ما}_۱}-۱=۰ ،\quad \frac{\text{لا}}{\text{لا}_۲}+\frac{\text{ما}}{\text{ما}_۲}-۱=۰$$

ہیں۔ اس لیے ب ر کی مساوات

$$\text{لا}\left(\frac{۱}{\text{لا}_۱}-\frac{۱}{\text{لا}_۲}\right)+\text{ما}\left(\frac{۱}{\text{ما}_۱}-\frac{۱}{\text{ما}_۲}\right)=۰$$

ہے۔



اف اور ج ق کی مساواتیں

$$\frac{\text{لا}}{\text{لا}_۲}+\frac{\text{ما}}{\text{ما}_۱}-۱=۰ ،\quad \frac{\text{لا}}{\text{لا}_۱}+\frac{\text{ما}}{\text{ما}_۲}-۱=۰$$

ہیں۔ اس لیے ب د کی مساوات

$$\text{لا}\left(\frac{۱}{\text{لا}_۱}-\frac{۱}{\text{لا}_۲}\right)-\text{ما}\left(\frac{۱}{\text{ما}_۱}-\frac{۱}{\text{ما}_۲}\right)=۰$$

ہے ۔

دفعہ ۵۶ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ پنسل ب ا، ب د، ب ج، ب ر موسیقی پنسل ہے اور اس لیے سمتیں ا، و ج، ر اور ق، س، ف، ر موسیقی ہیں ۔

۵۸ — وہ شرط معلوم کرنا کہ خطوطِ مستقیم $\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 = 0$ اور $\text{ا}'\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}'\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}'\,\text{ما}^2 = 0$ موسیقی طور پر مزدوج ہوں ۔

فرض کرو کہ خطوں کے زوج

$$\text{ما} = \text{م}_1\,\text{لا} \,،\quad \text{ما} = \text{م}_3\,\text{لا}$$

اور

$$\text{ما} = \text{م}_2\,\text{لا} \,،\quad \text{ما} = \text{م}_4\,\text{لا}$$

ہیں ۔ اب اگر $\text{ما} = \text{م}_1\,\text{لا}$، $\text{ما} = \text{م}_2\,\text{لا}$، $\text{ما} = \text{م}_3\,\text{لا}$، $\text{ما} = \text{م}_4\,\text{لا}$ سے موسیقی پنسل بنے تو حاصل ہونا چاہیے (دفعہ ۵۵)

$$\frac{(\text{م}_1 - \text{م}_2)(\text{م}_3 - \text{م}_4)}{(\text{م}_1 - \text{م}_4)(\text{م}_3 - \text{م}_2)} = -1$$

یا

$$2\,\text{م}_1\text{م}_3 + 2\,\text{م}_2\text{م}_4 = (\text{م}_1 + \text{م}_3)(\text{م}_2 + \text{م}_4)$$

لیکن دی ہوئی مساواتوں سے

$$\text{م}_1 + \text{م}_3 = -\frac{2\,\text{ھ}}{\text{ب}} \,،\quad \text{م}_1\text{م}_3 = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \,،$$

$$\text{م}_2 + \text{م}_4 = -\frac{2\,\text{ھ}'}{\text{ب}'} \,،\quad \text{م}_2\text{م}_4 = \frac{\text{ا}'}{\text{ب}'}$$

پس مطلوبہ شرط

$$\text{ا}\,\text{ب}' + \text{ا}'\,\text{ب} = 2\,\text{ھ}\,\text{ھ}'$$

ہے ۔

۵۹ — اسی طریقہ پر ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ نقطوں کے وہ زوج جو مساواتوں

ا لاؔ + ۲ ھ لا + ب = ۰ ، اور اَ لاؔ + ۲ ھَ لا ما + بَ = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں موسیقی طور پر مزدوج ہوں گے اگر

اب َ + اَب = ۲ ھ ھَ

درپیچ

۶۰ - تعریف - فرض کرو کہ ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم پر و ایک ثابت نقطہ ہے اور اسی خط پر نقطوں کے جوڑے ف، فَ؛ ق، قَ؛ ر، رَ؛ وغیرہ ایسے ہیں کہ

وف × وفَ = وق × وقَ = ور × ورَ = ... = مستقل = ک

تب ہم کہتے ہیں کہ یہ نقطے درپیچ میں ایک نظام بناتے ہیں اور نقطہ و اِس نظام کا مرکز ہے - ف، فَ جیسے دو نقطے ایک دوسرے کے مزدوج کہلاتے ہیں - مرکز کا مزدوج نقطہ لامتناہی فاصلہ پر ہوتا ہے -

اگر ہر نقطہ مرکز کے اُسی جانب ہو جس جانب اُس کا مزدوج ہے تو دو نقطے ک، کَ، مرکز کے مخالف جانبوں پر، ایسے موجود ہوں گے کہ وک۲ = وکَ۲ = وف × وفَ اِن نقطوں ک، کَ کو دوہرے نقطے یا ماسکے کہا جاتا ہے -

یہ ظاہر ہے کہ جب یہ دو ماسکے دیے گئے ہوں تو درپیچ پوری طرح متعین ہو جاتا ہے -

مزدوج نقطوں کے دو زوج معلوم ہوں تو بھی درپیچ پوری طرح متعین ہوتا ہے -

کیونکہ فرض کرو کہ اِن نقطوں ا، اَ اور ب، بَ (فرض کرو) کے فاصلے کسی نقطہ سے جو اُس خطِ مستقیم میں ہے جس میں دیے ہوئے

نقطے واقع ہیں ا، اَ اور ب، بَ ہیں۔ فرض کرو کہ درپیچ کے مرکز کا فاصلہ اُسی نقطہ سے لا ہے۔ تب حسب ذیل رشتہ حاصل ہوتا ہے:

(ا - لا) (اَ - لا) = (ب - لا) (بَ - لا)

یا (ا + اَ - ب - بَ) لا = ا اَ - ب بَ

پس مرکز کا صرف **ایک** محل ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اگر ا + اَ = ب + بَ یعنے اگر ا اَ اور ب بَ کا نقطہ وسطی ایک ہی ہو تو اِن چار نقطوں سے جو درپیچ متعین ہوگا اُس کا مرکز لامتناہی پر ہوگا اور اس کے بالعکس۔

اس طرح اگر نقطوں کے کوئی زوج ا، اَ؛ ب، بَ؛ ج، جَ؛ وغیرہ ایسے ہوں کہ ا اَ، ب بَ، ج جَ وغیرہ کے نقاط وسطی منطبق ہوتے ہوں تو اِن نقطوں سے درپیچ کا وہ نظام حاصل ہوگا جس کا مرکز لامتناہی پر ہوگا۔

مرکز کے محل کو ہندسی طریقہ پر اسی طرح معلوم کیا جا سکتا ہے کہ مزدوج نقطوں کے دو جوڑوں میں سے ایک ایک کو لے کر اس کے نقطوں میں سے گذرتا ہوا ایک دائرہ کھینچا جائے تو (اقلیدس مقالہ ۳ مسئلہ ۳۷) ان دائروں کا مشترک وتر اُس خط کو جس پر مزدوج نقطے واقع ہیں مطلوبہ مرکز میں قطع کرے گا۔

۶۱ — اگر متعدد نقطے درپیچ میں ہوں تو اِن میں سے کسی چار نقطوں کی چلیپی نسبت اِن کے چار مزدوجوں کی چلیپی نسبت کے مساوی ہوگی۔

فرض کرو کہ کوئی چار نقطے ف، ق، ر، س ہیں اور مرکز سے اِن نقطوں کے فاصلے علی الترتیب ف، ق، ر، س ہیں اس لیے اِن کے مزدوجوں کے فاصلے ک/ف، ک/ق، ک/ر، ک/س ہوں گے۔ تب

{ف ق ر س} = (ق - ف) (س - ر) / (س - ف) (ق - ر)

اور

$$\{ فَ قَ رَ سَ \} = \frac{\left(\frac{ک}{ق} - \frac{ک}{ف}\right)\left(\frac{ک}{س} - \frac{ک}{ر}\right)}{\left(\frac{ک}{س} - \frac{ک}{ف}\right)\left(\frac{ک}{ق} - \frac{ک}{ر}\right)} = \frac{(ف - ق)(ر - س)}{(ف - س)(ر - ق)}$$

پس $\{ ف ق ر س \} = \{ فَ قَ رَ سَ \}$

اِس سے ہم اِس امر کا امتحان کر سکتے ہیں کہ آیا کوئی چھ نقطے درپیچ میں ہیں یا نہیں - کیونکہ ا، اَ اور ب، بَ سے حاصل شدہ درپیچ میں ف، فَ مزدوج نقطے ہونگے اگر

$$\{ ا ب اَ ف \} = \{ اَ بَ ا فَ \}$$

۶۲* - درپیچ کے کوئی دو مزدوج نقطے اور اس کے دو ماسکے ایک موسیقی سعت بناتے ہیں -

فرض کرو کہ درپیچ کے دو ماسکے $ک_۱$، $ک_۲$ ہیں اور مرکز و ہے - فرض کرو کہ $ک_۱ و = ج = و ک_۲$ -

تب و سے نقطوں $ک_۱$، $ک_۲$ کے فاصلے مساوات

$$لا^۲ - ج^۲ = ۰$$

کی اصلیں ہیں -

نیز و سے مزدوج نقطوں کے کسی زوج کے فاصلے مساوات

$$لا^۲ + ۲ ل لا + ج^۲ = ۰$$

کی اصلیں ہیں -

پس مسئلہ دفعہ ۵۸ سے فوراً ماخوذ ہوتا ہے -

۶۳* - وہ شرط معلوم کرنا کہ مساواتوں

$$ا_۱ لا^۲ + ۲ ھ_۱ لا + ب_۱ = ۰، \quad ا_۲ لا^۲ + ۲ ھ_۲ لا + ب_۲ = ۰،$$

$$ا_{۳} لا^{۲} + ۲ ھ_{۳} لا + ب_{۳} = ۰$$

سے حاصل شدہ نقطوں کے تین زوج درپیچ میں ہوں ۔

اُن فاصلوں کا حاصل ضرب جو ہر زوج کے دو نقطے کسی نقطہ لا = د سے رکھتے ہیں ایک ہی ہونا چاہئے، فرض کرو کہ وہ لہ کے مساوی ہے ۔ (۷۱)

مساوات

$$ا_{۱} (لا - د)^{۲} + ۲ ھ_{۱} (لا - د) + ب_{۱} = ۰$$

کی اصلوں کا حاصل ضرب

$$\frac{(ا_{۱} د^{۲} - ۲ ھ_{۱} د + ب_{۲})}{ا_{۱}}$$

ہے - پس لہ کی کسی قیمت کے لئے حاصل ہونا چاہئے

$$ا_{۱} (د^{۲} - لہ) - ۲ ھ_{۱} د + ب_{۱} = ۰،$$

$$ا_{۲} (د^{۲} - لہ) - ۲ ھ_{۲} د + ب_{۲} = ۰،$$

اور $ا_{۳} (د^{۲} - لہ) - ۲ ھ_{۳} د + ب_{۳} = ۰$

$د^{۲} - لہ$ اور د کو ساقط کرنے سے مطلوبہ شرط

$$\begin{vmatrix} ا_{۱} & ھ_{۱} & ب_{۱} \\ ا_{۲} & ھ_{۲} & ب_{۲} \\ ا_{۳} & ھ_{۳} & ب_{۳} \end{vmatrix} = ۰$$

حاصل ہوتی ہے ۔

۶۴* ــ دفعہ ماسبق سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ایک خطِ مستقیم پر چھ نقطوں کو جو درپیچ میں ہوں کسی نقطہ سے ملایا جائے تو اس طریقہ سے جو پنسل بنے گی وہ کسی دوسرے خطِ مستقیم سے ایسے چھ نقطوں میں منقطع ہو گی جو درپیچ میں ہوں گے ۔

سب سے اول یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر چھ خطوں کی کوئی پنسل کسی خطِ مستقیم ف ق سے نقطوں کے ایسے تین زوجوں میں قطع ہو جو درپیچ میں

ہوں تو یہ پنسل ف ۔ ق کے متوازی کسی خط سے درپیچ میں قطع ہو گی ۔
اب فرض کرو کہ خطوطِ مستقیم کے تین زوج

$$\text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ھ}_{۱}\,\text{لا ما} + \text{ب}_{۱}\,\text{ما}^{۲} = ۰ \text{، وغیرہ}$$

ہیں جہاں محور لا اُس خط کے متوازی ہے جو خطوں کو نقطوں کے ایسے زوجوں میں قطع کرتا ہے جو درپیچ میں ہیں، اور محور ما کسی دوسرے خطِ مستقیم کے متوازی ہے جو کوئی بھی ہو سکتا ہے ۔
تب ہم جانتے ہیں کہ ما = ۱ ، خطوں کو درپیچ میں قطع کریگا اور اسلیے

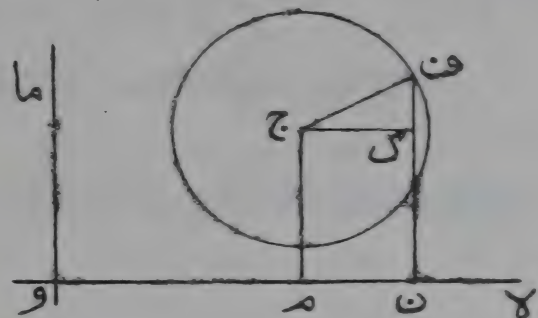
$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{۱} & \text{ھ}_{۱} & \text{ب}_{۱} \\ \text{ا}_{۲} & \text{ھ}_{۲} & \text{ب}_{۲} \\ \text{ا}_{۳} & \text{ھ}_{۳} & \text{ب}_{۳} \end{vmatrix} = ۰$$

لیکن یہ وہ شرط بھی ہے کہ لا = ۱ ، خطوں کو نقطوں کے ایسے تین زوجوں میں قطع کرے جو درپیچ میں ہوں ۔

چوتھا باب

دائرہ

۶۵ ۔ قائم محوروں کے حوالے سے دائرہ کی مساوات معلوم کرنا۔ (۱۰۲)



فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز ج ہے اور اس کے محیط پر کوئی نقطہ ف ہے
فرض کرو کہ ج کے محدد (د، ع) اور ف کے محدد (لا، ما) ہیں۔ فرض کرو کہ دائرہ کا نصف قطر ا ہے۔ ج م اور ف ن کو و ما کے متوازی اور ج ک کو و لا کے متوازی کھینچو (حسب شکل)۔ تب

ج ک^2 + ک ف^2 = ج ف^2

لیکن ج ک = لا ـ د، ک ف = ما ـ ع

$$\therefore \quad (لا - د)^{2} + (ما - ع)^{2} = ا^{2} \text{ ، } \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

مطلوبہ مساوات ہے۔

اگر دائرہ کا مرکز مبدا ہو تو د اور ع دونوں صفر ہوں گے اور دائرہ کی مساوات

$$لا^{2} + ما^{2} = ا^{2} \text{ ، } \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہوگی۔

مساوات (۱) لکھی جا سکتی ہے

$$لا^{2} + ما^{2} - ۲\,د\,لا - ۲\,ع\,ما + د^{2} + ع^{2} - ا^{2} = ۰$$

اس لیے کسی دائرہ کی مساوات شکل

$$لا^{2} + ما^{2} + ۲\,گ\,لا + ۲\,ف\,ما + ج = ۰ \text{ ، } \ldots\ldots\ldots (۳)$$

کی ہوتی ہے جہاں گ، ف، ج مستقلات ہیں۔

اس کے بالعکس مساوات (۳) ایک دائرہ کی مساوات ہوگی۔ کیونکہ اس کو لکھا جا سکتا ہے

$$(لا + گ)^{2} + (ما + ف)^{2} = گ^{2} + ف^{2} - ج$$

اور اس مساوات سے ظاہر ہے کہ اس کے طریق پر کے کسی نقطہ سے نقطہ $(-گ \text{، } -ف)$ کا فاصلہ مستقل ہے اور یہ فاصلہ $\sqrt{گ^{2} + ف^{2} - ج}$ کے مساوی ہے۔ پس مساوات (۳) ایک دائرہ کو تعبیر کرتی ہے جس کا نصف قطر $\sqrt{گ^{2} + ف^{2} - ج}$ ہے اور مرکز نقطہ $(-گ \text{، } -ف)$ پر ہے۔

اگر $گ^{2} + ف^{2} - ج = ۰$ تو دائرہ کا نصف قطر صفر ہے اور دائرہ کو ایسی صورت میں نقطہ دائرہ کہتے ہیں۔

اگر گ۲ + ف۲ − ج منفی ہو تو لا اور ما کی کوئی حقیقی قیمتیں مساوات کو پورا نہیں کرینگی، ایسی صورت میں دائرہ کو خیالی دائرہ کہتے ہیں۔

مندرجۂ بالا بیان سے یہ واضح ہے کہ دوسرے درجہ کی کوئی مساوات ایک دائرہ کو تعبیر کرے گی بشرطیکہ (۱) لا۲ اور ما۲ کے سر مساوی ہوں اور (۲) کوئی رقم ایسی نہ ہو جس میں لا ما آئے۔

۶۶ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک دائرہ کی عام مساوات

لا۲ + ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ہے۔ اس مساوات میں تین مستقلات ہیں۔ اگر ہم ایک دائرہ کی مساوات معلوم کرنا چاہیں جو تین دیے ہوئے نقطوں میں سے گذرے یا کوئی اور شرطیں پوری کرے تو ہم اس کی مساوات کو مندرجہ بالا شکل کی مساوات فرض کرینگے (۴۷ اور دی ہوئی شرطوں کے ذریعہ زیر بحث دائرہ کے لیے مستقلات گ، ف، ج کی قیمتیں متعین کریں گے۔

مثال ۱ — اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو تین نقطوں (۰، ۱)، (۱، ۰) اور (۲، ۱) میں سے گذرتا ہے۔

[فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

لا۲ + ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ہے۔

اب چونکہ نقطہ (۰، ۱) دائرہ پر ہے اس لیے لا = ۰ اور ما = ۱ رکھنے سے مساوات پوری ہونی چاہیے

∴ ۱ + ۲ ف + ج = ۰،

نیز (۱، ۰) دائرہ پر ہے اس لیے

۱ + ۲ گ + ج = ۰،

اور (۲، ۱) دائرہ پر ہے اس لیے

۴ + ۱ + ۴ گ + ۲ ف + ج = ۰

پس گ = ف = −۱، اور ج = ۱

اس لیے مطلوبہ مساوات

$$لا^{۲} + ما^{۲} - ۲\,لا - ۲\,ما + ۱ = ۰$$

ہے۔]

مثال ۲ — اگر ایک دائرہ کے ایک قطر کے سِروں ا، ب کے محدد (لاَ، ماَ)، (لاً، ماً) ہوں تو دائرہ کی مساوات (لا - لاَ)(لا - لاً) + (ما - ماَ)(ما - ماً) = ۰ ہوگی۔

[وہ خط جو دائرہ پر کے کسی نقطہ ف (لا، ما) کو ا سے ملاتا ہے محور لا کے ساتھ زاویہ $مس^{-۱}\frac{ما - ماَ}{لا - لاَ}$ بناتا ہے، اور وہ خط جو ف کو ب سے ملاتا ہے محور لا کے ساتھ زاویہ $مس^{-۱}\frac{ما - ماً}{لا - لاً}$ بناتا ہے۔ اب چونکہ خطوط ف ا اور ف ب علی القوائم ہیں اس لیے

$$۱ + \frac{ما - ماَ}{لا - لاَ} \times \frac{ما - ماً}{لا - لاً} = ۰$$

یا

$$(لا - لاَ)(لا - لاً) + (ما - ماَ)(ما - ماً) = ۰$$

مثال ۳ — اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا مرکز (-۴، -۳) ہے اور نصف قطر ۵ ہے۔

جواب: $لا^{۲} + ما^{۲} + ۸\,لا + ۶\,ما = ۰$

مثال ۴ — اُس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو جس کی مساوات

$$لا^{۲} + ما^{۲} - ۲\,لا + ۴\,ما - ۱۱ = ۰$$

ہے۔

جواب: مرکز (۱، -۲)، نصف قطر ۴

مثال ۵ — اُس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو جس کی مساوات

$$۵\,لا^{۲} + ۵\,ما^{۲} + ۴\,لا - ۸\,ما - ۱۶ = ۰$$

ہے۔

جواب: مرکز $(-\frac{۲}{۵}، \frac{۴}{۵})$، نصف قطر ۲

مثال ۶ — نقطوں (۱، ۳)، (۲، -۱) اور (-۱، ۱) میں سے گذرنیوالے

دائرہ کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: ۵ لا^2 + ۵ ما^2 - ۱۱ لا - ۹ ما - ۱۲ = ۰

مثال ۷۔ اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقطوں (۰، ۰)، (ا، ۰) (۷۵
اور (۰، ب) میں سے گذرتا ہے۔ جواب: لا^2 + ما^2 - ا لا - ب ما = ۰

مثال ۸۔ اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقطوں (ا، ۰)، (-ا، ۰)، اور (۰، ب) میں سے گذرتا ہے۔ جواب: لا^2 + ما^2 + $\frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ب}}$ ما - ا^2 = ۰

۶۷۔ دائرہ کی مساوات معلوم کرنا جبکہ محاور زاویہ سہ پر مائل ہوں۔

نقطہ (د، ع) سے نقطہ (لا، ما) کے فاصلہ کا مربع

(لا - د)^2 + (ما - ع)^2 + ۲ (لا - د) (ما - ع) جم سہ   (دفعہ ۴)

ہوگا۔ اس لیے اُس دائرہ کی مساوات جس کا مرکز نقطہ (د، ع) پر اور جس کا نصف قطر ا ہو

(لا - د)^2 + (ما - ع)^2 + ۲ (لا - د) (ما - ع) جم سہ = ا^2، ...... (۱)

یا لا^2 + ما^2 + ۲ لا ما جم سہ - ۲ لا (د + ع جم سہ) - ۲ ما (ع + د جم سہ)
+ د^2 + ع^2 + ۲ د ع جم سہ - ا^2 = ۰، ..... (۲)

ہوگی۔

پس کسی دائرہ کی مساوات بحوالہ مائل محاور شکل

لا^2 + ما^2 + ۲ لا ما جم سہ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰، ..... (۳)

کی ہوگی جہاں گ، ف، ج کسی مخصوص دائرہ کے لحاظ سے مستقلات ہیں لیکن مختلف دائروں کے لیے مختلف ہیں۔

مساوات (۳) درست رہے گی اگر ہم اس کی طرفین کو کسی مستقل عدد سے ضرب دیں، تب اس کی شکل ہو جائے گی:

ا لا^2 + ۲ ا لا ما جم سہ + ا ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰، ..... (۴)

پس ایک دائرہ کی مساوات بحوالہ مائل محاور دوسرے درجہ کی

ہوتی ہے اور (۱) لا^2 اور ما^2 کے سر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں اور (۲) لا ما اور لا^2 کے سروں کی نسبت ۲ جم سہ ہوتی ہے جہاں سہ محوروں کا درمیانی زاویہ ہے۔

ہم اُس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کر سکتے ہیں جس کی مساوات لا^2 + ما^2 + ۲ لا ما جم سہ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ہے۔ کیونکہ یہ مساوات، مساوات (لا - د)^2 + (ما - ع)^2 + ۲ (لا - د) (ما - ع) جم سہ - ا^2 = ۰ کے مماثل ہوگی اگر د + ع جم سہ = -گ، ع + د جم سہ = -ف، اور د^2 + ع^2 + ۲ د ع جم سہ - ا^2 = ج۔ اس لیے د جب^2 سہ = ف جم سہ - گ، ع جب^2 سہ = گ جم سہ - ف اور ا^2 جب^2 سہ = ف^2 + گ^2 - ۲ ف گ جم سہ - ج جب^2 سہ۔

۶۸ - تعریف - فرض کرو کہ کسی منحنی پر ف اور ق دو نقطے لیے گئے ہیں اور فرض کرو کہ نقطہ ق منحنی پر حرکت کر کے نقطہ ف سے قریب اور قریب تر آتا ہے، تب خط ف ق کے انتہائی محل کو جبکہ ق حرکت کر کے ف تک آئے اور بالآخر اس پر منطبق ہو جائے منحنی کا مماس نقطہ ف پر کہتے ہیں۔

وہ خط جو ف میں سے گذر کر مماس پر عمود ہو نقطہ ف پر منحنی کا عماد کہلاتا ہے۔

۶۹ - دائرہ لا^2 + ما^2 = ا^2 کے کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دائرہ پر کے کسی دو نقطوں کے محدد لاَ، ماَ اور لاً، ماً ہیں۔ نقطہ (لاَ، ماَ) اور (لاً، ماً) میں سے گذرنیوالے قاطع کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - \text{لاَ}}{\text{لاَ} - \text{لاً}} = \frac{\text{ما} - \text{ماَ}}{\text{ماَ} - \text{ماً}} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے - لیکن چونکہ یہ دو نقطے دائرہ پر ہیں اس لیے

$$\text{لاَ}^{۲} + \text{ماَ}^{۲} = \text{ا}^{۲} \quad \text{اور} \quad \text{لاً}^{۲} + \text{ماً}^{۲} = \text{ا}^{۲}$$

اس لیے

$$\text{لاَ}^{۲} - \text{لاً}^{۲} = \text{ماً}^{۲} - \text{ماَ}^{۲} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساواتوں (۱) اور (۲) کی متناظر طرفوں کو ضرب دینے سے

$$(\text{لا} - \text{لاَ})(\text{لاَ} + \text{لاً}) = -(\text{ما} - \text{ماَ})(\text{ماَ} + \text{ماً}) \text{،} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اب فرض کرو کہ نقطہ (لاً ، ماً) ، نقطہ (لاَ ، ماَ) تک حرکت کرتا ہے اور بالآخر اس پر منطبق ہوتا ہے ، تب انتہا میں وتر نقطہ (لاَ ، ماَ) پر مماس بنجاتا ہے - پس مماس کی مساوات ، (۳) میں لاً = لاَ اور ماً = ماَ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$(\text{لا} - \text{لاَ})\,\text{لاَ} + (\text{ما} - \text{ماَ})\,\text{ماَ} = ۰$$

یا

$$\text{لالاَ} + \text{ماماَ} = \text{لاَ}^{۲} + \text{ماَ}^{۲} = \text{ا}^{۲}$$

$$\therefore \quad \text{لالاَ} + \text{ماماَ} = \text{ا}^{۲}$$

نقطہ (لاَ ، ماَ) پر کے مماس کی مطلوبہ مساوات ہے -

۷۰ — اُس دائرہ کے کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنا جس کی مساوات

$$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + ۲\,\text{گ}\,\text{لا} + ۲\,\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$$

ہے -

دو نقطوں (لاَ ، ماَ) اور (لاً ، ماً) میں سے گذرنے والے قاطع کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - \text{لاَ}}{\text{لاَ} - \text{لاً}} = \frac{\text{ما} - \text{ماَ}}{\text{ماَ} - \text{ماً}} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے - چونکہ یہ دو نقطے دائرہ پر ہیں اس لیے

لاَ^{2} + ماَ^{2} + ۲گ لاَ + ۲ف ماَ + ج = ۰،

لاً^{2} + ماً^{2} + ۲گ لاً + ۲ف ماً + ج = ۰،

∴ (لاَ - لاً) (لاَ + لاً + ۲گ) = -(ماَ - ماً) (ماَ + ماً + ۲ف)،.... (۲)

مساواتوں (۱) اور (۲) کی متناظر طرفوں کو ضرب دو تو قاطع کی مساوات

(لا - لاَ) (لاَ + لاً + ۲گ) = -(ما - ماَ) (ماَ + ماً + ۲ف)

حاصل ہوگی -

اس لیے (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات

(لا - لاَ) (لاَ + گ) + (ما - ماَ) (ماَ + ف) = ۰

یا لالاَ + ماماَ + گ لا + ف ما = لاَ^{2} + ماَ^{2} + گ لاَ + ف ماَ

ہے -

طرفین میں گ لاَ + ف ماَ + ج جمع کرو تو چونکہ (لاَ، ماَ) دائرہ پر ہے اس لیے مماس کی مساوات ہو جاتی ہے

لالاَ + ماماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ) + ج = ۰

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ نقطہ (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات، دائرہ کی مساوات سے لا^2 کو لالاَ میں، ما^2 کو ماماَ میں، ۲لا کو لا + لاَ میں، اور ۲ما کو ما + ماَ میں بدلنے سے معلوم کیجا سکتی ہے -

مثال ۱ — دائرہ لا^2 + ما^2 = ۲۵ کے نقطہ (۳، ۴) پر کے مماس کی مساوات ۳لا + ۴ما = ۲۵ ہے -

مثال ۲ — لا^2 + ما^2 - ۶لا - ۳ما - ۲ = ۰ کے نقطہ (۲، -۲) پر کے مماس کی مساوات

۲لا - ۲ما - ۳(لا + ۲) - $\frac{۳}{۲}$ (ما - ۲) - ۲ = ۰

یا ۲لا + ۷ما + ۱۰ = ۰

ہے ۔

مثال ۳ — $لا^{۲} + ما^{۲} = ۱۶۹$ کے نقطوں (۵، ۱۲)، (۱۲، -۵) پر کے مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ مماس نقطہ (۱۷، ۷) پر علی القوائم متقاطع ہوتے ہیں ۔

مثال ۴ — $لا^{۲} + ما^{۲} - ۴لا - ۴ما + ۴ = ۰$ کے نقطوں (۴، ۲) اور (۲، ۴) پر کے مماس معلوم کرو ۔ جواب : لا = ۴ اور ما = ۴

(۷۸) **۷۱ — ایک دائرہ کے کسی نقطہ پر عماد کی مساوات معلوم کرنا ۔**

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا^{۲} + ما^{۲} = ا^{۲}$$

ہے ۔ اگر اس پر (لاَ، ماَ) کوئی نقطہ ہے تو اس نقطہ پر مماس کی مساوات

$$لا\,لاَ + ما\,ماَ = ا^{۲} \text{ ، } \quad \ldots\ldots (۱)$$

ہے ۔

اس خط کی مساوات جو (لاَ، ماَ) میں سے گذر کر (۱) پر عمود ہو حسب دفعہ ۳۰

$$(لا - لاَ)\,ماَ - (ما - ماَ)\,لاَ = ۰$$

یا

$$لا\,ماَ - ما\,لاَ = ۰ \text{ ، } \quad \ldots\ldots (۲)$$

ہے ۔ یہ نقطہ (لاَ، ماَ) پر عماد کی مطلوبہ مساوات ہے ۔

مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ دائرہ کے کسی نقطہ پر کا عماد مبدا میں سے گذرتا ہے یعنے دائرہ کے مرکز میں سے ۔

۷۲ — ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم اور دائرہ کے نقاطِ تقاطع معلوم کرنا ۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$لا^{۲} + ما^{۲} = ا^{۲} \text{ ، } \quad \ldots\ldots (۱)$$

اور خطِ مستقیم کی مساوات

$$\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ج} \text{ ، } \dots\dots\dots (\text{۲})$$

ہے ۔ اُن نقطوں پر جو خطِ مستقیم اور دائرہ میں مشترک ہیں یہ دونوں رشتے پورے ہوتے ہیں ۔ خط پر کے نقطے مساوات $\text{ما}^{2} = (\text{م}\,\text{لا} + \text{ج})^{2}$ کو پورا کرتے ہیں اور دائرہ پر کے نقطے مساوات $\text{ما}^{2} = \text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}$ کو پورا کرتے ہیں ۔ اس لیے مشترک نقطوں کے لیے مساوات حاصل ہوتی ہے

$$(\text{م}\,\text{لا} + \text{ج})^{2} = \text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}$$

یا

$$\text{لا}^{2}(\text{۱} + \text{م}^{2}) + \text{۲}\,\text{م}\,\text{ج}\,\text{لا} + \text{ج}^{2} - \text{ا}^{2} = \text{۰} \text{ ، } \dots\dots (\text{۳})$$

یہ ایک دو درجی مساوات ہے اور ہر دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں، حقیقی اور مختلف، یا حقیقی اور مساوی، یا خیالی —

پس لا کی دو قیمتیں ہیں اور اِن کے جواب میں ما کی دو قیمتیں (۲) سے معلوم ہوتی ہیں ۔ اس طرح پر خطِ مستقیم ایک دائرہ سے دو نقطوں پر ملتا ہے حقیقی اور مختلف، یا دو منطبق، یا دو خیالی نقطوں پر ۔ خیالی نقطے وہ ہیں جنکے محددوں میں سے ایک یا دونوں خیالی ہوں ۔ (۴۹)

خطِ مستقیم اور دائرہ کے خیالی نقاطِ تقاطع کو ہندسی طور پر تعبیر کرنا ناممکن ہے، لیکن ہم دیکھیں گے کہ خیالی نقطے اور خطوط اکثر اہم مفہوم کے حامل ہوتے ہیں اور ان پر غور کرنا ضروری ہے تاکہ ہم اپنے مسئلوں کو عام سے عام شکلوں میں بیان کر سکیں ۔

مساوات (۳) کی اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہونگی اگر

$$(\text{۱} + \text{م}^{2})(\text{ج}^{2} - \text{ا}^{2}) = \text{م}^{2}\,\text{ج}^{2}$$

یعنی اگر

$$\text{ج}^{2} = \text{ا}^{2}(\text{۱} + \text{م}^{2}) \dots\dots\dots (\text{۴})$$

اگر لا کی دو قیمتیں ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو ما کی دو قیمتیں بھی (۲) کی رو سے ایک دوسرے کے مساوی ہونی چاہئیں ۔

اس لیے وہ دو نقطے جن پر دائرہ خط سے منقطع ہوتا ہے منطبق ہونگے اگر $\text{ج} = \text{ا}\sqrt{\text{۱} + \text{م}^{2}}$ ۔

پس خط ما = م لا + ا √(ا + م²)، دائرہ لا² + ما² = ا² کو م کی تمام قیمتوں کے لیے مس کرے گا۔

چونکہ جذر √(ا + م²) کو کوئی ایک علامت دی جا سکتی ہے اس لیے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ م کی ہر قیمت کے جواب میں دائرہ کے دو مماس ہوتے ہیں یعنے کسی دیے ہوئے خط کے متوازی دو مماس ہوتے ہیں۔

مثال ۱ ۔ ثابت کرو کہ لا = ۷ اور ما = ۸، دائرہ

لا² + ما² − ۴ لا − ۶ ما − ۱۲ = ۰

کو مس کرتے ہیں۔ مماسوں کے نقاط تماس معلوم کرو۔ جواب: (۷، ۳)، (۲، ۸)

مثال ۲ ۔ خط لا + ۲ ما − ۵ = ۰ اور دائرہ لا² + ما² = ۲۵ کے نقاط تقاطع معلوم کرو۔ جواب: (۵، ۰) اور (−۳، ۴)

مثال ۳ ۔ معلوم کرو کہ خط ۳ لا + ۴ ما + ۷ = ۰، دائرہ

لا² + ما² − ۴ لا − ۶ ما − ۱۲ = ۰

کو کہاں قطع کرتا ہے۔ جواب: خط نقطہ (−۱، ۱) پر مس کرتا ہے

(۸۰) ۷۳ ۔ ایک دائرہ کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے نقاط وسطی کا طریق معلوم کرنا۔

دائرہ کے مرکز کو مبداء اور محور لا کو وتروں کے متوازی لو۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

لا² + ما² = ا²، .... (۱)

ہے اور فرض کرو کہ متوازی وتروں میں سے کسی ایک کی مساوات

ما − ج = ۰، .... (۲)

ہے۔

(۱) اور (۲) کے نقاطِ تقاطع کے لیے

لا² + ج² = ا²

$$لا = \pm \sqrt{ا^2 - ج^2}$$

چونکہ لا کی یہ دو قیمتیں مساوی اور مختلف العلامت ہیں اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وتر کے نقطہ وسطی کا فصلہ صفر ہے یعنے وتر کا وسطی نقطہ ہمیشہ محور ما پر رہتا ہے۔ یہ ج کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔ اگر ج > ا تو لا کی دونوں قیمتیں خیالی ہیں لیکن اِن کا مجموعہ تاہم صفر ہے اور اسلئے وتر کا وسطی نقطہ پھر بھی محور ما پر رہتا ہے۔

پس ایک دائرہ کے متوازی وتروں کے نقاط وسطی کا طریق مرکز میں سے گذرنے والا وہ خطِ مستقیم ہے جو وتروں پر عمود ہے۔ اس طریق کو اِس خط کے اُس حصہ تک محدود فرض کرنے کی ضرورت نہیں ہے جو دائرہ کے اندر ہے۔

۴۷ — دفعات ماسبق میں ہم نے دائرہ کے کوئی ہندسی خواص تسلیم نہیں کئے ہیں اِلّا آنکہ اس کے کسی نقطہ سے مرکز کا فاصلہ مستقل رہتا ہے۔ اگر ہم اُن مسئلوں کو مان لیں جو اقلیدس جلد ۳ میں ثابت کئے گئے ہیں تو دفعات ماسبق کے بعض نتیجے زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ اُس دائرہ پر جس کی مساوات $لا^2 + ما^2 = ا^2$ ہے کوئی نقطہ (لاَ، ماَ) ہے تو اُس خط کی مساوات جو (لاَ، ماَ) سے دائرہ کے مرکز تک کھینچا گیا ہے $\frac{لا}{لاَ} - \frac{ما}{ماَ} = ۰$ ہے اور (لاَ، ماَ) میں سے گذرنے والے عمودی خط کی مساوات (دفعہ ۳۰)

$$(لا - لاَ)\, لاَ + (ما - ماَ)\, ماَ = ۰$$

یا

$$لا لاَ + ما ماَ - ا^2 = ۰$$

ہے اور اقلیدس جلد ۳ سے یہ خط اُس نقطہ پر کا مماس ہے۔

پھر خط ما - م لا - ج = ۰، دائرہ $لا^2 + ما^2 - ا^2 = ۰$ کو مس کرے گا اگر خط کا عمودی فاصلہ دائرہ کے مرکز سے نصف قطر کے مساوی ہو، اس لیے شرط (۸۱)

$$\text{ج} = \pm \text{ا} \sqrt{1 + \text{م}^2}$$

حاصل ہوتی ہے ۔

۷۵ ۔ کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں اور یہ دو مماس حقیقی ہوں گے اگر یہ نقطہ دائرہ کے باہر ہو، منطبق ہوں گے اگر نقطہ دائرہ پر ہو، اور خیالی ہوں گے اگر نقطہ دائرہ کے اندر ہو ۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2$$

ہے اور فرض کرو کہ کسی نقطہ کے محدد (ھ، ک) ہیں ۔ فرض کرو کہ دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدد (لاَ، ماَ) ہیں ۔ تب (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات

$$\text{لا لاَ} + \text{ما ماَ} = \text{ا}^2 ،$$

ہوگی ۔ یہ مماس نقطہ (ھ، ک) میں سے گذریگا اگر

$$\text{ھ لاَ} + \text{ک ماَ} = \text{ا}^2 ، \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

لیکن (لاَ، ماَ) دائرہ پر ہے اس لیے

$$\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2 = \text{ا}^2 ، \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساواتوں (۱) اور (۲) سے لاَ اور ماَ کی وہ قیمتیں معلوم ہوں گی جن پر کے مماس مخصوص نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرتے ہیں ۔ ماَ کی بجائے (۲) میں اندراج کرو تو

$$\text{لاَ}^2 + \frac{(\text{ا}^2 - \text{ھ لاَ})^2}{\text{ک}^2} = \text{ا}^2$$

یا

$$\text{لاَ}^2(\text{ھ}^2 + \text{ک}^2) - 2\,\text{ا}^2\,\text{ھ لاَ} + \text{ا}^2(\text{ا}^2 - \text{ک}^2) = 0 ، \quad \ldots\ldots (۳)$$

مساوات (۳) سے فصلے حاصل ہوتے ہیں اور (۱) سے متناظر مُعین معلوم ہوتے ہیں۔ اب چونکہ مساوات (۳) ایک دودرجی مساوات ہے اس لیے دو نقطے ہیں جن پر کے مماس نقطہ (ہ، ک) میں سے گذرتے ہیں۔ مساوات (۳) کی اصلیں حقیقی، منطبق، یا خیالی ہونگی بموجب اسکے کہ

$$\text{ا}^4\,\text{ہ}^2 - \text{ا}^2\,(\text{ا}^2 - \text{ک}^2)\,(\text{ہ}^2 + \text{ک}^2)$$

صفر سے بڑا، اس کے مساوی، یا اس سے کم ہو۔ یعنے بموجب اسکے کہ

$$\text{ہ}^2 + \text{ک}^2 - \text{ا}^2$$

صفر سے بڑا، اس کے مساوی، یا اس سے کم ہو۔ یعنے بموجب اس کے کہ نقطہ (ہ، ک)، دائرہ کے باہر، دائرہ پر، یا دائرہ کے اندر ہو۔

(۸۲)

مثالیں

۱ — اُن نقطوں کے محدد معلوم کرو جہاں خط ما = ۲ لا + ۱، دائرہ لا^2 + ما^2 = ۲ کو قطع کرتا ہے۔ جواب: (−۱، −۱) اور ($\frac{۱}{۵}$، $\frac{۷}{۵}$)

۲ — ثابت کرو کہ خط ۳ لا − ۲ ما = ۰، دائرہ لا^2 + ما^2 − ۳ لا + ۲ ما = ۰ کو مس کرتا ہے۔

۳ — ثابت کرو کہ دائرے لا^2 + ما^2 = ۲ اور لا^2 + ما^2 − ۶ لا − ۶ ما + ۱۰ = ۰ ایک دوسرے کو نقطہ (۱، ۱) پر مس کرتے ہیں۔

۴ — ثابت کرو کہ دائرہ لا^2 + ما^2 − ۲ ا لا − ۲ ا ما + ا^2 = ۰، محاور لا اور ما کو مس کرتا ہے۔

۵ — اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو خطوط لا = ۰، ما = ۰ اور لا = ج کو مس کرتا ہے۔ جواب: ۴ لا^2 + ۴ ما^2 − ۴ ج لا ± ۴ ج ما + ج^2 = ۰

۶ — اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو خطوط لا = ۰، لا = ا اور ۳ لا + ۴ ما + ۵ ا = ۰ کو مس کرتا ہے۔

جواب: لا^2 + ما^2 − ا لا + ۲ ا ما + ا^2 = ۰ یا لا^2 + ما^2 − ا لا + $\frac{۹}{۲}$ ا ما + $\frac{۸۱}{۱۶}$ ا^2 = ۰

۷ — ثابت کرو کہ خط ما = م (لا − ا) + ا $\sqrt{۱ + م^2}$، دائرہ لا^2 + ما^2 = ۲ ا لا کو مس کرتا ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔

۸ — دو خطوط کھینچے گئے ہیں جو علی الترتیب نقطوں (ا، ۰)، (−ا، ۰) میں سے گذرتے ہیں اور ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ ط بناتے ہیں۔ اِن کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔ جواب: دائرے لا^2 + ما^2 − ا^2 = ± ۲ ا ما حم ط

۹ — ایک دائرہ ایک دیے ہوئے خط کو مس کرتا ہے اور دوسرے خط پر جو اول الذکر خط پر عمود ہے مستقل طول (۲ ل) قطع کرتا ہے۔ اس کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔ جواب: ما^2 − لا^2 = ل^2

۱۰ — ایک خطِ مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ نقطوں (ا، ۰)، (−ا، ۰) سے اِس پر کھینچے ہوئے عمودوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ ہمیشہ ایک دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۱۱ — لا^2 + ما^2 = ۳ کے اُن دو مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو محور لا کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتے ہیں۔ جواب: ما = $\sqrt{۳}$ (لا ± ۲)

۱۲ — اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو ایک مثلث میں جس کے ضلعوں کی مساواتیں

لا = ۱، ۲ ما = ۵، ۳ لا − ۴ ما = ۵

ہیں کھینچا گیا ہے۔ جواب: (لا − ۲)^2 + (ما − $\frac{۳}{۲}$)^2 = ۱

۶۷ — کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے دو مماس کھینچے گئے ہیں، اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو مماسوں کے نقاطِ تماس کو ملاتا ہے۔

فرض کرو کہ اُس نقطہ کے محدد جس سے مماس کھینچے گئے ہیں (لاَ، ماَ)

ہیں - فرض کرو کہ نقاط تماس کے محدد ھ، ک اور ھَ، کَ ہیں اور دائرہ کی

(۸۳) مساوات $لا^2 + ما^2 = ا^2$ ہے -

مماسوں کی مساواتیں حسب دفعہ ۶۹

$$لا ھ + ما ک - ا^2 = ۰،$$

$$لا ھَ + ما کَ - ا^2 = ۰$$

ہونگی - لیکن چونکہ یہ دونوں مماس نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرتے ہیں اس لیے یہ دونوں مساواتیں محددوں لاَ، ماَ سے پوری ہوتی ہیں، اسلئے

$$لاَ ھ + ماَ ک - ا^2 = ۰، \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$لاَ ھَ + ماَ کَ - ا^2 = ۰، \quad \ldots\ldots (۲)$$

لیکن مساواتیں (۱) اور (۲) وہ شرطیں ہیں کہ نقاط (ھ، ک) اور (ھَ، کَ) اُس خطِ مستقیم پر واقع ہوں جس کی مساوات

$$لاَ لا + ماَ ما - ا^2 = ۰، \quad \ldots\ldots (۳)$$

ہے -

پس (۳) اُس خطِ مستقیم کی مطلوبہ مساوات ہے جو نقطہ (لاَ، ماَ) سے کھینچے ہوئے مماسوں کے نقاطِ تماس میں سے گذرتا ہے -

اگر دائرہ کی مساوات $لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰$ ہو تو ہم اُسی طریقہ پر (دفعہ ۷۰ کے نتیجہ کو مانکر) ثابت کر سکتے ہیں کہ اُس خط کی مساوات جو نقطہ (لاَ، ماَ) سے کھینچے ہوئے مماسوں کے نقاطِ تماس میں گذرتا ہے

$$لا لاَ + ما ماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ) + ج = ۰$$

ہے -

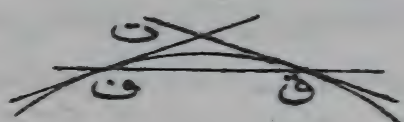
اگر نقطہ (لاَ، ماَ) دائرہ کے باہر ہو تو اس سے کھینچے ہوئے دو مماس حقیقی ہوں گے اور اس لیے محدد ھ، ک اور ھَ، کَ حقیقی ہوں گے لیکن اگر نقطہ (لاَ، ماَ) دائرہ کے اندر ہو تو یہ دو مماس خیالی ہوں گے لیکن اس صورت میں بھی وہ خط جس کی مساوات (۳) ہے حقیقی خط ہو گا جبکہ لاَ اور ماَ حقیقی ہوں - اس طرح ایک حقیقی خط ہوتا ہے جو دائرہ کے اندرونی نقطہ

کھینچے ہوئے دو خیالی مماسوں کے خیالی نقاطِ تماس کو ملاتا ہے۔

تعریف۔ اگر کسی نقطہ سے ایک دائرہ کے مماس کھینچے گئے ہوں اور اِن مماسوں (خیالی یا حقیقی) کے نقاط تماس کو ایک خط مستقیم کے ذریعہ ملایا جائے تو اِس خط مستقیم کو دائرہ کے لحاظ سے اُس نقطہ کا قطبی کہتے ہیں۔

ایک خط مستقیم ایک دائرہ کو جن نقطوں (حقیقی یا خیالی) پر قطع کرتا ہے اُن نقطوں پر کھینچے ہوئے مماسوں کے نقطہ تقاطع کو دائرہ کے لحاظ سے اُس خط کا قطب کہتے ہیں۔

۷ ۷ — فرض کرو کہ کسی نقطہ ت سے ایک دائرہ کے دو مماس ت ف ' ت ق ہیں۔ فرض کرو کہ ق ' ف کی جانب حرکت کرکے بالآخر ف پر آکر منطبق ہوتا ہے تو ت بھی حرکت کرکے بالآخر ف پر آکر منطبق ہوگا اور مماس ت ف اور ت ق بالآخر ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے اور وتر ف ق بھی منطبق ہوگا۔ اس کا یہ مطلب ہے کہ ت کا قطبی جبکہ ت دائرہ پر ہو اس نقطہ پر کے مماس پر منطبق ہوتا ہے۔



یہ دفعہ ۷ ۶ کے نتیجہ کے مطابق ہے۔ کیونکہ قطبی کی مساوات اُسی شکل کی ہے جو مماس کی مساوات کی ہے اور اس لیے ایک نقطہ کا قطبی جبکہ نقطہ دائرہ پر ہو اُس نقطہ پر کا مماس ہوتا ہے

۷ ۸ — اگر ایک نقطہ ف کا قطبی ' ق میں سے گذرے تو ق کا قطبی ' ف میں سے گذرے گا۔

فرض کرو کہ ف کے محدد (لاَ، ماَ) ہیں اور ق کے (لاً، ماً)۔ فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \text{ا}^2 = 0$ ہے۔

(لاَ، ماَ) اور (لاً، ماً) کے قطبیوں کی مساواتیں علی الترتیب

$$\text{لا لاَ} + \text{ما ماَ} - \text{ا}^2 = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\text{لا لاً} + \text{ما ماً} - \text{ا}^2 = 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

ہیں۔ اگر ق، ف کے قطبی پر ہے تو اس کے محدد مساوات (۱) کو پورا کرنا چاہئیں اِس لیے

$$\text{لاً لاَ} + \text{ماً ماَ} - \text{ا}^2 = 0$$

لیکن یہ وہ شرط بھی ہے کہ ف، خط (۲) پر ہو یعنی ق کے قطبی پر، اسلیے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

اگر ق، ایک ثابت خط مستقیم پر ہو اور ف اِس خط کا قطب ہو تو ق کا قطبی، ف میں سے گذرنا چاہیے کیونکہ بموجب فرض ف کا قطبی ق میں سے گذرتا ہے۔

اِس کے بالعکس اگر کسی ثابت نقطہ ف میں سے کوئی خط مستقیم کھینچا جائے اور ق اِس خط کا قطب ہو تو چونکہ ف، ق کے قطبی پر ہے اِس لیے نقطہ ق ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہونا چاہیے یعنے ف کے قطبی پر۔

(۸۵) اگر دو نقطوں ف، ق کے قطبی نقطہ ر پر ملیں تو ر، خط ف ق کا قطب ہوگا۔

چونکہ ر، ف کے قطبی پر ہے اِس لیے ر کا قطبی ف میں سے گذرتا ہے، اسی طرح وہ ق میں سے بھی گذرتا ہے اور اِس لیے اُس کو خط ف ق ہونا چاہیے۔

۷۹ ـــ دائرہ کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی کیلئے ہندسی عمل۔

(۸۶) پس قطبی کو حاصل کرنے کے لیے حسب ذیل عمل حاصل ہوتا ہے ۔
و ف کو ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ دائرہ کو ا پر قطع کرتا ہے ۔ خط و ف پر
ایک ایسا نقطہ ن لو کہ و ف : و ا = و ا : و ن ۔ ن میں سے
ایک خط، و ف پر عمود کھینچو ۔

مثال ۱ ۔ دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۴ کے لحاظ سے حسب ذیل نقطوں کے
قطبیوں کی مساواتیں لکھو :

(۱) (۲، ۳) (۲) (۳، ‎-۱) (۳) (‎۱، ‎-۱)

مثال ۲ ۔ ۲ لا + ۳ ما ‎- ۶ = ۰ کا قطب بلحاظ دائرہ
لا^۲ + ما^۲ ‎- ۵ = ۰

کے معلوم کرو ۔
[اگر لاَ، ماَ قطب ہے تو دیا ہوا خط وہی ہے جو لا لاَ + ما ماَ ‎- ۵ = ۰ ہے
اس لیے

$$\frac{\text{لاَ}}{۲} = \frac{\text{ماَ}}{۳} = \frac{۵}{۶}$$

اس لیے مطلوبہ قطب ($\frac{۵}{۳}$، $\frac{۵}{۲}$) ہے ۔]

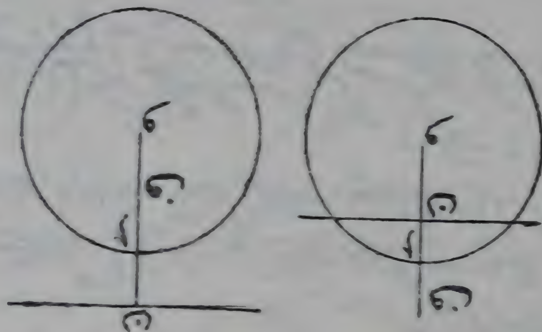
مثال ۳ ۔ حسب ذیل خطوں کے قطب اُس دائرہ کے لحاظ سے
معلوم کرو جس کی مساوات لا^۲ + ما^۲ = ۳۵ ہے : ۔
(۱) ۴ لا + ۶ ما ‎- ۷ = ۰، (۲) ۳ لا ‎- ۲ ما ‎- ۵ = ۰، (۳) ا لا + ب ما = ۱

جوابات : (۱) (۲۰، ۳۰)، (۲) (۲۱، ‎-۱۴)، (۳) (۳۵ ا، ۳۵ ب)

مثال ۴ ۔ اُن نقطوں کے محدد معلوم کرو جہاں خط لا = ۱، دائرہ لا^۲ + ما^۲
= ۴ کو قطع کرتا ہے ۔ اِن نقطوں پر کے مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ
وہ نقطہ (۴، ۰) پر متقاطع ہوتے ہیں ۔

جواب : (۱، $\sqrt{۳}$)، (۱، ‎-$\sqrt{۳}$)

مثال ۵ ۔ اُن نقطوں کے محدد معلوم کرو جہاں خط ۳ لا + ۴ ما = ۲۵،
دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۲۵ کو قطع کرتا ہے اور اِن نقطوں پر کے مماسوں کی مساواتیں



[illegible]

[illegible] (2)

[illegible]

[illegible] (1)

[illegible]

معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ مماس نقطہ (۶، ۸) پر متقاطع ہوتے ہیں۔ نقطہ (۶، ۸) کے قطبی کی مساوات بلحاظ اِس دائرہ کے لکھو۔

مثال ۶۔ اگر نقطہ (لاَ، ماَ) کا قطبی بلحاظ دائرہ لا^{2} + ما^{2} = ا^{2} کے، دائرہ (لا - ا)^{2} + ما^{2} = ا^{2} کو مس کرے تو ثابت کرو کہ (لاَ، ماَ) اُس منحنی پر ہے جس کی مساوات ما^{2} + ۲ الا = ا^{2} ہے۔

۸۰ ۔ دائرہ کی قطبی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز ج ہے اور اِس کے قطبی محدد غہ، عہ ہیں۔
فرض کرو کہ دائرہ کا نصف قطر ا کے مساوی ہے۔
فرض کرو کہ دائرہ پر کے کسی نقطہ ف کے قطبی محدد (ر، طہ) ہیں۔ تب

ج ف^{2} = و ج^{2} + و ف^{2} - ۲ و ج × و ف جم ج و ف

لیکن ج ف = ا، و ج = غہ، و ف = ر، زاویہ لا و ج = عہ، اور زاویہ لا و ف = طہ۔ اس لیے

ا^{2} = غہ^{2} + ر^{2} - ۲ ر غہ جم (طہ - عہ)، ....(۱)

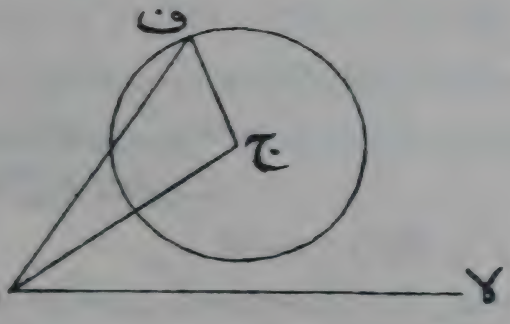
جو مطلوبہ مساوات ہے۔
اگر مبداء دائرہ کے مرکز پر ہو تو غہ = ا اور اسلیے (۱) سے

ر = ۲ ا جم (طہ - عہ)، ....(۲)

اور اگر ابتدائی خط مرکز میں سے گذرے تو عہ صفر ہوگا اور مطلوبہ مساوات

ر = ۲ ا جم طہ، ....(۳)

ہوگی۔



مساوات (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر طہ کی کسی مخصوص قیمت کے متناظر ر کی دو قیمتیں ر₁، ر₂ ہوں تو

ر₁ ر₂ = غہ² - ا²، .... (۴)

اس طرح ر₁ ر₂ کا انحصار طہ پر نہیں ہے۔

اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ اگر ایک ثابت نقطہ سے ایک خطِ مستقیم کھینچا جائے جو دئے ہوئے دائرہ کو قطع کرے تو مقطوعات سے بنا ہوا مستطیل رقبہ میں مستقل ہوتا ہے۔

(۴) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مبدا، دائرہ کے اندر ہو (اس صورت میں غہ < ا) تو ر₁ اور ر₂ مختلف العلامت ہونے چاہئیں اور اس لیے ان کو مختلف سمتوں میں کھینچنا چاہئے جیسا کہ ہندسی طور پر واضح ہے۔

علی القوائم دائرے

۸۱ ۔ وہ شرط معلوم کرنا کہ دو دائرے

لا² + ما² + ۲گ₁ لا + ۲ف₁ ما + ج₁ = ۰ اور لا² + ما² + ۲گ₂ لا + ۲ف₂ ما + ج₂ = ۰

ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کریں۔

ان دو دائروں کے مرکز علی الترتیب (-گ₁، -ف₁) اور (-گ₂، -ف₂) ہیں اور ان کے نصف قطروں کے مربع علی الترتیب گ₁² + ف₁² - ج₁ اور گ₂² + ف₂² - ج₂ ہیں۔

اب یہ دائرے علی القوائم متقاطع ہوں گے اگر مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کا مربع نصف قطروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہو

پس مطلوبہ شرط یہ ہے کہ

(گ₁ - گ₂)² + (ف₁ - ف₂)² = گ₁² + ف₁² - ج₁ + گ₂² + ف₂² - ج₂

جو $۲گ_۱گ_۲ + ۲ف_۱ف_۲ - ج_۱ - ج_۲ = ۰$
میں تحویل ہوتی ہے۔

متبادل ثبوت:۔ دائروں کے ایک مشترک نقطہ $(لا_۱، ما_۱)$ پر کے مماسوں کی مساواتیں

$$لا لا_۱ + ما ما_۱ + گ_۱(لا + لا_۱) + ف_۱(ما + ما_۱) + ج_۱ = ۰،$$

اور $$لا لا_۱ + ما ما_۱ + گ_۲(لا + لا_۱) + ف_۲(ما + ما_۱) + ج_۲ = ۰$$

ہیں۔ یہ مماس علی القوائم ہونگے اگر

$$(لا_۱ + گ_۱)(لا_۱ + گ_۲) + (ما_۱ + ف_۱)(ما_۱ + ف_۲) = ۰۔$$

یعنی $$لا_۱^۲ + ما_۱^۲ + لا_۱(گ_۱ + گ_۲) + ما_۱(ف_۱ + ف_۲) + گ_۱گ_۲ + ف_۱ف_۲ = ۰، \quad ....(۱)$$

لیکن چونکہ $(لا_۱، ما_۱)$ دونوں دائروں پر ہے اس لیے

$$لا_۱^۲ + ما_۱^۲ + ۲گ_۱لا_۱ + ۲ف_۱ما_۱ + ج_۱ = ۰، \quad ....(۲)$$

$$لا_۱^۲ + ما_۱^۲ + ۲گ_۲لا_۱ + ۲ف_۲ما_۱ + ج_۲ = ۰، \quad ....(۳)$$

(۱) کو ۲ سے ضرب دو اور (۲) اور (۳) کے مجموعہ کو تفریق کرو تو

$$۲گ_۱گ_۲ + ۲ف_۱ف_۲ - ج_۱ - ج_۲ = ۰$$

۸۲ ۔ اُس مماس کا طول معلوم کرنا جو ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک دائرہ کا کھینچا گیا ہو۔

فرض کرو کہ دیا ہوا نقطہ ت ہے اور دائرہ کا مرکز ج ہے۔ فرض کرو کہ ت سے دائرہ کے دو مماسوں میں سے ایک ت ف ہے۔ تب ہم جانتے ہیں کہ زاویہ ج ف ت قائمہ زاویہ ہے، اسلئے

$$ت ف^۲ = ج ت^۲ - ج ف^۲، \quad ....(۱)$$

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

(لا − ا)^2 + (ما − ب)^2 − ج^2 = ۰، .... (۲)

ہے اور فرض کرو کہ ت کے محدد لاَ، ماَ ہیں تو

ج ت^2 = (لاَ − ا)^2 + (ماَ − ب)^2

اس لیے (۱) کی رو سے

ت ف^2 = (لاَ − ا)^2 + (ماَ − ب)^2 − ج^2، .... (۳)

اِس لیے مساوات (۲) کے دائیں جانبی رکن میں محددوں لاَ، ماَ کو درج کرنے سے ت ف^2 یعنے مماس کے طول کا مُربع معلوم ہوتا ہے۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر س = ۰ ایک دائرہ کی مساوات ہو ۸۹
(جہاں س کو اختصاراً لا^2 + ما^2 + ۲ گ لا + ۲ف ما + ج کی بجائے لکھا گیا ہے) اور س میں کسی نقطہ کے محدد درج کئے جائیں تو نتیجہ اُس مماس کے طول کے مُربع کے مساوی ہوتا ہے جو اُس نقطہ سے دائرہ کا کھینچا گیا ہو یا اُس مستطیل (اقلیدس جلد سوم مسئلہ ۳۶) کے رقبہ کے مساوی جس کے متصلہ اضلاع اُن وتروں کے مقطوعے ہوں جو نقطہ میں سے کھینچے گئے ہوں۔ اگر نقطہ دائرہ کے اندر ہو تو مستطیل کا رقبہ منفی ہوگا اور مماس کا طول خیالی۔

اگر دائرہ کی مساوات

ا لا^2 + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ہو تو کسی نقطہ سے مماس کے طول کا مربع معلوم کرنے کے لیے اول ا سے تقسیم کرنا چاہئے اور پھر اُس نقطہ کے محدد درج کرنا چاہئے جس سے مماس کھینچا گیا ہے۔

مماسوں کے اُس زوج کی مساوات معلوم کرنا جو کسی نقطہ سے دائرہ لا^2 + ما^2 = اَ^{2} کے کھینچے گئے ہوں۔

فرض کرو کہ نقطہ (لاَ، ماَ) سے کھینچے ہوئے مماس ت ف اور ت ق ہیں۔

اب اگر ان میں سے ایک مماس پر کوئی نقطہ س (لاً، ماً) ہو (فرض کرو کہ ت ف پر) اور ف ق پر عمود ت ل اور س م کھینچے جائیں تو متشابہ شلثوں سے

ت ف^2 : س ف^2 = ت ل^2 : س م^2، .... (۱)

لیکن ف ق کی مساوات

لالاَ + ماماَ − ر^2 = ۰

ہے، اس لیے   ت ل^2 / س م^2 = (لاَ^{2} + ماَ^{2} − ر^2)^2 / (لاَلاً + ماَماً − ر^2)^2

اور دفعہ ۲۸ کی رو سے

ت ف^2 / س ف^2 = (لاَ^{2} + ماَ^{2} − ر^2)^2 / (لاً^{2} + ماً^{2} − ر^2)^2

اس لیے (۱) سے

(لاً^{2} + ماً^{2} − ر^2) (لاَ^{2} + ماَ^{2} − ر^2) − (لاَلاً + ماَماً − ر^2)^2 = ۰

اس لیے مماسوں میں سے کسی ایک کا کوئی نقطہ، طریق

(لا^2 + ما^2 − ر^2) (لاَ^{2} + ماَ^{2} − ر^2) − (لالاَ + ماماَ − ر^2)^2 = ۰

پر ہے اور اس لیے یہ مطلوبہ مساوات ہے ۔

دو دائروں کا بنیادی محور

۸۳ — اگر ایک دائرہ کی مساوات

لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰، .... (۱)

اور دوسرے دائرہ کی مساوات

لا^2 + ما^2 + ۲گَ لا + ۲فَ ما + جَ = ۰، .... (۲)

(۹۰ ہو تو مساوات

لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = لا^2 + ما^2 + ۲گَ لا + ۲فَ ما + جَ
. . . . (۳)

صریحاً کسی ایسے نقطے کے محددوں سے پوری ہوگی جو (۱) اور نیز (۲) پر ہو۔ اِس لیے مساوات (۳) اُن نقطوں میں سے گذرنے والے طریق کو تعبیر کرتی ہے جو دونوں دائروں میں مشترک ہیں۔

لیکن مساوات (۳)

۲ (گ ۔ گَ) لا + ۲ (ف ۔ فَ) ما + ج ۔ جَ = ۰، . . . . (۴)

میں تحویل ہوتی ہے اور یہ مساوات درجہ اول کی ہے اور اس لیے ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

پس مساوات (۳) یا (۴) اُن نقطوں میں سے گذرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات ہے جو دائروں (۱) اور (۲) میں مشترک ہیں۔

اگر دو دائرے (۱) اور (۲) ایک دوسرے کو حقیقی نقطوں میں قطع نہ کریں تو بھی (۳) یا (۴) سے حاصل شدہ خطِ مستقیم تمام صورتوں میں حقیقی ہوگا بشرطیکہ گ، ف، ج، گَ، فَ، جَ حقیقی ہوں۔ اِس طرح ہمیں ایک ایسے حقیقی خطِ مستقیم کی مثال ملتی ہے جو دو دائروں کے خیالی نقاطِ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔

مساوات (۳) کا دوسرا ہندسی مفہوم بھی دیا جاسکتا ہے۔

اگر س = ۰ ایک دائرہ کی مساوات ہو جس میں لا^2 کا سر ایک ہو اور اگر کسی نقطہ کے محدد س میں درج کیے جائیں تو نتیجہ اُس مماس کے مربع کے مساوی ہوگا جو اِس نقطہ سے دائرہ کا کھینچا گیا ہو (دفعہ ۸۲)۔

اب اگر خطِ مستقیم (۳) پر کسی نقطہ کے محدد لا، ما ہوں تو اس مساوات کی دائیں جانب کا جملہ اُس مماس کے مربع کے مساوی ہوگا جو نقطہ (لا، ما) سے دائرہ (۱) کا کھینچا گیا ہے اور بائیں جانب کا جملہ اُس مماس کے مربع کے مساوی ہوگا جو نقطہ (لا، ما) سے دائرہ (۲) کا کھینچا گیا ہے۔

پس خط (۳) کے کسی نقطہ سے دو دائروں (۱) اور (۲) کے مماس

کھینچے جائیں تو یہ مماس ایک دوسرے کے مساوی ہوں گے۔

تعریف - وہ خطِ مستقیم جو دو دائروں کے نقاطِ تقاطع (حقیقی یا خیالی) میں سے کھینچا گیا ہو اِن دائروں کا بنیادی محور کہلاتا ہے۔

یہ قابل ذکر ہے کہ دو دائروں کے بنیادی محور کی یہ تعریف بھی
(۹۱) ہوسکتی ہے کہ وہ اُن نقطوں کا طریق ہے جن سے اِن دو دائروں کے کھینچے ہوئے مماس طول میں مساوی ہوتے ہیں۔

اِن دو دائروں کے مرکزوں کے محدد علی الترتیب -گ، -ف اور -گَ، -فَ ہیں، اس لیے ان کو ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات

$$\frac{\text{لا} + \text{گ}}{\text{گ} - \text{گَ}} = \frac{\text{ما} + \text{ف}}{\text{ف} - \text{فَ}}$$

ہے جو (حسب دفعہ ۳۰) خط (۴) پر عمود ہے۔

پس دو دائروں کا بنیادی محور اِن کے مرکزوں کو ملانے والے خط پر عمود ہوتا ہے۔

۸۴ - تین دائروں میں سے دو دو کے تین بنیادی محور ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

اگر تین دائروں کی مساواتیں س = ۰، سَ = ۰، سً = ۰ ہوں جن میں سے ہر ایک میں لا^۲ کا سر ایک ہو تو پہلے اور دوسرے کے بنیادی محور کی مساوات

س - سَ = ۰

ہے۔ دوسرے اور تیسرے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

سَ - سً = ۰

ہے اور تیسرے اور پہلے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

س' - س = ۰

ہے۔ اب یہ ظاہر ہے کہ اگر ان میں سے دو مساواتیں کسی نقطہ کے محددوں سے پوری ہوں تو تیسری مساوات بھی ان محددوں سے پوری ہو گی۔ ان تین بنیادی محوروں کے نقطۂ تقاطع کو دائروں کا بنیادی مرکز کہتے ہیں۔

ہم محور دائرے

۸۵*۔ دائروں کے ایک نظام کی مساوات معلوم کرنا جن میں سے ہر زوج کا بنیادی محور وہی ہو۔

اگر مشترک بنیادی محور کو محور ما فرض کیا جائے تو نظام کے دائروں میں سے کسی دو کی مساوات (جبکہ اس کو معیاری شکل میں لکھا گیا ہو جس میں لا² کا سر اکائی ہو) صرف لا کے سر میں مختلف ہو سکتی ہے۔ اس طرح دائروں کے نظام کی عام مساوات جبکہ ان دائروں میں سے کسی زوج کے بنیادی محور کی مساوات لا = ۰ ہو

لا² + ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ہے جہاں ف اور ج تمام دائروں کے لیے وہی ہیں۔

اگر مبداء کو (۰، - ف) پر تبدیل کیا جائے تو مطلوبہ مساوات شکل

لا² + ما² + ۲ گ لا + ج = ۰، . . . . (۱)

اختیار کرتی ہے جہاں ج تمام دائروں کے لیے وہی ہے اور گ مختلف دائروں کے لیے مختلف ہے۔

بنیادی محور دائروں کو حقیقی نقطوں میں قطع کرے گا اگر ج منفی ہو اور خیالی نقطوں میں قطع کرے گا اگر ج مثبت ہو۔

مساوات (۱) کو شکل

$$(\text{لا} + \text{گ})^{2} + \text{ما}^{2} = \text{گ}^{2} - \text{ج}$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔ پس اگر گ کو $\pm\sqrt{\text{ج}}$ کے مساوی لیا جائے تو دائرہ نقطوں $(\mp\sqrt{\text{ج}}\ ،\ ۰)$ میں سے ایک میں تحویل ہوگا۔

اِن نقطہ دائروں کو ہم محور دائروں کے نظام کے انتہائی نقطے کہا جاتا ہے۔

جب ج مثبت ہوتا ہے یعنے جب دائرے خود خیالی نقطوں میں منقطع ہوتے ہیں تو انتہائی نقطے حقیقی ہوتے ہیں اور اس کے بالعکس جب دائرے حقیقی نقطوں میں منقطع ہوتے ہیں تو انتہائی نقطے خیالی ہوتے ہیں۔

دفعہ ۱۸ میں معلوم شدہ شرط سے یہ فوراً مستنبط ہوتا ہے کہ مساواتوں

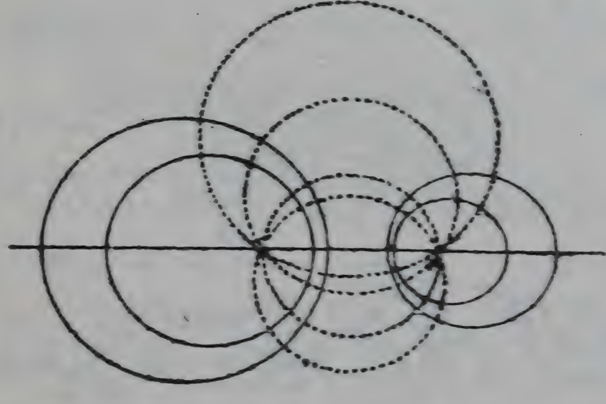
$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + ۲\,\text{گ لا} + \text{ج} = ۰\ ،$$

اور

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + ۲\,\text{ف ما} - \text{ج} = ۰$$

سے تعبیر شدہ ہم محور دائروں کے دو نظامات جہاں ج تمام دائروں کیلئے وہی ہے ایسے ہیں کہ ایک نظام کا کوئی دائرہ دوسرے نظام کے تمام دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

یہ دو علی القوائم نظامات ایسے ہیں کہ ایک نظام کے مشترک نقطے دوسرے نظام کے انتہائی نقطے ہیں۔



شکل ذیل میں (۹۳)
دائروں کے ایک نظام کو پورے خطوں سے اور دوسرے نظام کو نقطہ دار خطوں سے تعبیر کیا گیا ہے۔

۸۶* ـ اگر دو دائروں کی مساواتیں س = ۰ اور سَ = ۰ ہوں تو مساوات س - لہ سَ = ۰، لہ کی تمام قیمتوں کیلئے ایسے تمام دائروں کو تعبیر کرے گی جو س = ۰ اور سَ = ۰ کے مشترک نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔

اگر س = ۰ اور سَ = ۰ علی الترتیب

لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰، .... (۱)

لا^2 + ما^2 + ۲گَ لا + ۲فَ ما + جَ = ۰، .... (۲)

ہوں تو مساوات س - لہ سَ = ۰

لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج - لہ (لا^2 + ما^2 + ۲گَ لا + ۲فَ ما + جَ) = ۰، ...... (۳)

ہوگی۔ اب مساوات (۳) صریحاً ایک دائرہ کی مساوات ہے خواہ لہ کی قیمت کچھ ہی ہو۔

نیز اگر کسی نقطہ کے محدد (۱) اور (۲) دونوں کو پورا کریں تو وہ (۳) کو بھی پورا کریں گے۔

پس س - لہ سَ = ۰، لہ کی کسی قیمت کے لیے، ایک ایسے دائرہ کی مساوات ہے جو س = ۰، سَ = ۰ کے مشترک نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

لہ کو مناسب قیمت دیکر دائرہ (۳) کو کسی دوسرے نقطے میں سے گذارا جا سکتا ہے، اس لیے س - لہ سَ = ۰ سے وہ تمام دائرے تعبیر ہوتے ہیں جو س = ۰ اور سَ = ۰ کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرتے ہیں۔

مساوات س - لہ سَ = ۰ کا ہندسی مفہوم قابل غور ہے۔ اس نقطہ سے جس کے محدد مساوات س - لہ سَ = ۰ کو پورا کرتے ہیں دائروں س = ۰ اور سَ = ۰ کے مماس کھینچو تو دفعہ ۸۲ سے معلوم ہوگا

کہ س = ۰ کے مماس کا مربع، سَ = ۰ کے مماس کے مربع کا لہ گنا ہے۔
اس لیے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

اُس نقطہ کا طریق جو اِس طرح حرکت کرے کہ اس سے دو دیے ہوئے دائروں کے مماس ایک مستقل نسبت میں ہوں ایک ہم محور دائرہ ہوتا ہے۔

۸۷ ـــ اگر دو دائروں کے مرکز و، وَ اور نصف قطر ا، اَ ہوں تو وہ دو نقطے جو خط و وَ کو داخلاً اور خارجاً نسبت ا : اَ میں تقسیم کرتے ہیں اِن دو دائروں کے **مشابہت کے مرکز** کہلاتے ہیں۔

مشابہت کے مرکزوں کے خواص پر بحث کرنے کا بہترین طریقہ ہندسی طریقہ ہے۔

اِن میں سے اہم ترین خواص یہ ہیں (۱) دو دائروں کے مشترک مماسوں میں سے دو، مشابہت کے ہر مرکز میں سے گذرتے ہیں، (۲) دو دائروں کے مشابہت کے ایک مرکز میں سے گذرنے والا کوئی خطِ مستقیم اِن دو دائروں سے متشابہاً منقطع ہوتا ہے۔

مثالیں

۱ ـــ اُس مماس کا طول معلوم کرو جو نقطہ (۲، ۵) سے دائرہ لا^۲ + ما^۲ - ۲ لا - ۳ ما - ۱ = ۰ کا کھینچا گیا ہے۔

نیز اُن مماسوں کا طول معلوم کرو جو نقطہ (۴، ۱) سے دائرہ

۴ لا^۲ + ۴ ما^۲ - ۳ لا - ما - ۷ = ۰

کے کھینچے گئے ہیں۔ جواب: ۳، ۲ √۳

۲ ـــ نقطوں (۳، ۰)، (۰، ۲) اور (- ۱، ۱) میں سے گذرنیوالے دائرہ کی مساوات معلوم کرو اور مبداء میں سے گذرنے والے تمام وتروں کے

مقطوعات کے مستقل مستطیل کی قیمت معلوم کرو۔ جواب: $\frac{۱۸}{۵}$

۳ — دائروں لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا + ۳ ما − ۷ = ۰ اور لا^۲ + ما^۲ − ۲ لا − ما + ۱ = ۰ کے بنیادی محور کی مساوات معلوم کرو۔ جواب: لا + ما − ۲ = ۰

۴ — دائروں لا^۲ + ما^۲ + ب لا + ب ما − ج = ۰ اور ا لا^۲ + ا ما^۲ + ب^۲ لا + ب^۲ ما = ۰ کا بنیادی محور معلوم کرو۔ جواب: ا لا − ب ما + $\frac{ج ا}{ا − ب}$ = ۰

۵ — دائروں لا^۲ + ما^۲ + ا لا + ب ما + ج = ۰ اور لا^۲ + ما^۲ + ب لا + ا ما + ج = ۰ کا بنیادی محور اور مشترک وتر کا طول معلوم کرو۔ (۹۵)

جواب: لا − ما = ۰، $\{\frac{۱}{۲}$ (ا + ب)^۲ − ۴ج$\}^{\frac{۱}{۲}}$

۶ — ثابت کرو کہ تین دائرے

لا^۲ + ما^۲ + ۳ لا + ۶ ما = −۱۲، لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا + ۸ ما + ۱۲ = ۰

اور لا^۲ + ما^۲ + ۱۲ ما + ۲۴ = ۰

ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں۔

۷ — تین دائروں

لا^۲ + ما^۲ + ۴ لا + ۷ = ۰، ۲ لا^۲ + ۲ ما^۲ + ۳ لا + ۵ ما + ۹ = ۰

اور لا^۲ + ما^۲ + ما = ۰

کا بنیادی مرکز معلوم کرو۔ جواب: (−۲، −۱)

۸ — دائروں

لا^۲ + ما^۲ = ۱ اور (لا − ۱)^۲ + (ما − ۳)^۲ = ۴

کے مشترک مماس معلوم کرو۔

[خط ل لا + م ما + ن = ۰ دونوں دائروں کو مس کرے گا اگر

ن^۲ = ل^۲ + م^۲ اور (ل + ۳ م + ن)^۲ = ۴ (ل^۲ + م^۲)

پس ۲ ن = ± (ل + ۳ م + ن)

اگر ل + ۳ م − ن = ۰ تو (ل + ۳ م)^۲ = ل^۲ + م^۲ اور اسلیے

م = ۰ یا ۳ ل + ۴ م = ۰

پس جب م = ۰ تو ل = ن اور مساوات لا + ۱ = ۰ ہے۔
لیکن جب ۳ ل = - ۴ م تو ۳ ن = ۵ م اور مساوات ۴ لا - ۳ ما - ۵ = ۰ ہے۔
پھر اگر ل + ۳ م + ۳ ن = ۰ تو ل = ۰ یا ۴ ل = ۳ م
پس جب ل = ۰ تو م = - ن اور مساوات ما - ۱ = ۰ ہے۔
لیکن جب ۴ ل = ۳ م تو ۴ ن = - ۵ م اور مساوات ۳ لا + ۴ ما - ۵ = ۰ ہے۔]

۹ — اُن خطوطِ مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو دائروں

لا^2 + ما^2 = ۴ اور (لا - ۴)^2 + ما^2 = ۱

دونوں کو مس کرتے ہیں - نیز مشابہت کے مرکزوں کے محدد معلوم کرو۔

جواب: ۳ لا ± $\sqrt{۷}$ ما - ۸ = ۰، اور لا ± $\sqrt{۱۵}$ ما - ۸ = ۰،
(۸، ۰)، ($\frac{۸}{۳}$، ۰)

۱۰ — اگر نقطہ (ف، گ) سے دائرہ لا^2 + ما^2 = ۶ کے مماس کا طول اُس مماس کا دوچند ہو جو نقطہ (ف، گ) سے دائرہ لا^2 + ما^2 + ۳ لا + ۳ ما = ۰ کا ہے تو

ف^2 + گ^2 + ۴ ف + ۴ گ + ۲ = ۰

۱۱ — اگر کسی نقطہ سے دائرہ لا^2 + ما^2 + ۲ لا = ۰ کے مماس کا طول اُس مماس کے طول کا تین گنا ہو جو اُسی نقطہ سے دائرہ لا^2 + ما^2 - ۴ = ۰ کا ہے تو ثابت کرو کہ یہ نقطہ دائرہ

۴ لا^2 + ۴ ما^2 - لا - ۱۸ = ۰

پر ہونا چاہئے۔

۱۲ — اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو دائروں لا^2 + ما^2 + ۲ لا + ۳ ما - ۷ = ۰ اور لا^2 + ما^2 + ۳ لا - ۲ ما - ۱ = ۰ کے نقاطِ تقاطع میں سے اور نقطہ (۱، ۲) میں سے گذرتا ہے۔

جواب: لا^2 + ما^2 + ۴ لا - ۷ ما + ۵ = ۰

۱۳ — ایک دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو لا^2 + ما^2 - ۴ = ۰ اور لا^2 + ما^2

۲۰ لا – ۴ ما + ۴ = ۰ کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرے اور خط لا + ۲ ما = ۰ کو مس کرے۔

جواب: لا² + ما² – لا – ۲ ما = ۰

۸۸ — حسب ذیل مثالوں میں بعض اہم ہیں۔ (۹۶)

(۱) ہم محور دائروں کے ایک سلسلہ کے لحاظ سے کسی ثابت نقطہ کے قطبی ایک دوسرے ثابت نقطہ میں سے گذرتے ہیں اور نظام کے انتہائی نقطوں میں سے ایک کا قطبی تمام دائروں کے لیے وہی ہے۔

دائروں کا نظام مساوات

لا² + ما² + ۲ ا لا + ج = ۰، .... (۱)

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ج تمام دائروں کے لیے وہی ہے (دفعہ ۸۵)۔

نظام کے انتہائی نقطے (± ج، ۰) ہیں۔

فرض کرو کہ ثابت نقطہ کے محدد (ف، گ) ہیں۔ تب (۱) کے لحاظ سے قطبی کی مساوات

ف لا + گ ما + ا (لا + ف) + ج = ۰، ...... (۲)

ہوگی۔

ا کی قیمت خواہ کچھ بھی ہو خطِ مستقیم (۲) ہمیشہ اُس نقطہ میں سے گذرے گا جو ف لا + گ ما + ج = ۰ اور لا + ف = ۰ سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر ف = ± ج اور گ = ۰ تو مساوات (۲)، ف (لا + ف)، + ا (لا + ف) = ۰ میں تحویل ہوتی ہے اور اس لئے لا + ف = ۰۔

پس انتہائی نقطوں میں سے ایک کا قطبی وہ خط ہے جو دوسرے انتہائی نقطہ میں سے گذرتا ہے اور بنیادی محور کے متوازی ہے۔

(۲) اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو اور ایک دائرہ کے لحاظ سے تین نقطوں کے قطبیوں سے مثلث اَ بَ جَ بنے چنانچہ بَ جَ، ا کا قطبی ہے جَ اَ، ب کا قطبی ہے اور اَ بَ، ج کا قطبی ہے تو تین خطوطِ مستقیم ا اَ، ب بَ، ج جَ ایک نقطہ پر ملیں گے۔

فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات

$$\text{لا}'^2 + \text{ما}'^2 = \text{ر}^2 \text{،} \quad \ldots\ldots (۱)$$

ہے اور فرض کرو کہ نقطوں ا، ب، ج کے محدد علی الترتیب $\text{لا}'$، $\text{ما}'$ اور $\text{لا}''$، $\text{ما}''$ اور $\text{لا}'''$، $\text{ما}'''$ ہیں۔

اب تین خطوط مستقیم بَ جَ، جَ اَ، اَ بَ کی مساواتیں

$$\text{لا}'\,\text{لا} + \text{ما}'\,\text{ما} - \text{ر}^2 = ۰ \text{،} \quad \ldots\ldots (۲)$$

$$\text{لا}''\,\text{لا} + \text{ما}''\,\text{ما} - \text{ر}^2 = ۰ \text{،} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اور

$$\text{لا}'''\,\text{لا} + \text{ما}'''\,\text{ما} - \text{ر}^2 = ۰ \text{،} \quad \ldots\ldots (۴)$$

ہیں۔

ا اَ (۳) اور (۴) کے نقطہ تقاطع میں سے گذرنے والا ایک خط ہے اور اس لیے اس کی مساوات (دفعہ ۳۳)،

$$\text{لا}\,\text{لا}'' + \text{ما}\,\text{ما}'' - \text{ر}^2 = \text{لہ}\,(\text{لا}\,\text{لا}''' + \text{ما}\,\text{ما}''' - \text{ر}^2)$$

میں شامل ہے۔ لیکن یہ خط ا میں سے بھی گذرتا ہے جس کے محدد ($\text{لا}'$، $\text{ما}'$) ہیں۔ اس لیے ہم لہ کو مساوات

$$\text{لا}'\,\text{لا}'' + \text{ما}'\,\text{ما}'' - \text{ر}^2 = \text{لہ}\,(\text{لا}'\,\text{لا}''' + \text{ما}'\,\text{ما}''' - \text{ر}^2)$$

سے معلوم کرتے ہیں۔

پس ا اَ کی مساوات

$$(\text{لا}\,\text{لا}'' + \text{ما}\,\text{ما}'' - \text{ر}^2)(\text{لا}'''\,\text{لا}' + \text{ما}'''\,\text{ما}' - \text{ر}^2)$$
$$= (\text{لا}\,\text{لا}''' + \text{ما}\,\text{ما}''' - \text{ر}^2)(\text{لا}'\,\text{لا}'' + \text{ما}'\,\text{ما}'' - \text{ر}^2) \text{،} \quad \ldots\ldots (۵)$$

ہے۔

دوسری مساواتیں متشاکل ہونے کی وجہ سے لکھ لی جا سکتی ہیں۔ چنانچہ (۹۷
وہ ہونگی

$$(\text{لا}\,\text{لا}''' + \text{ما}\,\text{ما}''' - \text{ر}^2)(\text{لا}'\,\text{لا}'' + \text{ما}'\,\text{ما}'' - \text{ر}^2)$$
$$= (\text{لا}\,\text{لا}' + \text{ما}\,\text{ما}' - \text{ر}^2)(\text{لا}''\,\text{لا}''' + \text{ما}''\,\text{ما}''' - \text{ر}^2) \text{،} \quad \ldots\ldots (۶)$$

$$(\text{لا}\,\text{لا}' + \text{ما}\,\text{ما}' - \text{ر}^2)(\text{لا}''\,\text{لا}''' + \text{ما}''\,\text{ما}''' - \text{ر}^2)$$
$$= (\text{لا}\,\text{لا}'' + \text{ما}\,\text{ما}'' - \text{ر}^2)(\text{لا}'''\,\text{لا}' + \text{ما}'''\,\text{ما}' - \text{ر}^2) \text{،} \quad \ldots\ldots (۷)$$

چونکہ یہ تین مساواتیں (۵)، (۶) اور (۷) باہم جمع کرنے پر متماثلاً معدوم ہوتی ہیں اس لیے اِن مساواتوں سے تعبیر شدہ خطوط ا اَ، ب بَ، اور ج جَ ایک نقطہ پر ملنے چاہئیں (دفعہ ۳۴) -

(۳) دو دیے ہوئے دائروں کے نقاطِ تقاطع میں سے ایک و ہے اور و میں سے گذرنے والا کوئی خط اِن دائروں کو علی الترتیب ف اور ق پر قطع کرتا ہے۔ ف ق کے وسطی نقطہ کا طریق معلوم کرو۔

و کو مبداء قرار دو اور فرض کرو کہ دائروں کی مساواتیں (دفعہ ۸۰)

ر = ۲ ا جم (طہ - عہ) اور ر = ۲ ب جم (طہ - بہ)

ہیں۔

تب طہ کی کسی مخصوص قیمت کے لیے

و ف = ۲ ا جم (طہ - عہ)، .... (۱)

و ق = ۲ ب جم (طہ - بہ)، .... (۲)

اگر س، ف ق کا وسطی نقطہ ہے تو

و س = ½ (و ف + و ق)

∴ و س = ا جم (طہ - عہ) + ب جم (طہ - بہ)

∴ س کا طریق

ر = ا جم (طہ - عہ) + ب جم (طہ - بہ)

= (ا جم عہ + ب جم بہ) جم طہ + (ا جب عہ + ب جب بہ) جب طہ

سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے یہ طریق وہ دائرہ ہے جس کی مساوات

ر = ا جم (طہ - ب)

ہے جہاں ا اور ب مساواتوں

ا جم ب = ا جم عہ + ب جم بہ، ا جب ب = ا جب عہ + ب جب بہ

سے معلوم ہوتے ہیں۔

(۴) اگر ایک مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ پر کے کسی نقطہ سے مثلث کے ضلعوں پر عمود کھینچے جائیں تو اِن عمودوں کے پائیں ایک خطِ مستقیم پر واقع ہونگے۔

نقطہ و کو مبدا اور اس میں سے گذرنے والے قطر کو ابتدائی خط لو ۔ تب دائرہ کی مساوات ر = ۲ ا جم طہ ہوگی ۔

فرض کرو کہ نقطوں ا، ب، ج کے زاویئی محدد علی الترتیب عہ، بہ، جہ ہیں اور خط ب ج وہ خط ہے جو (۲ ا جم بہ، بہ) اور (۲ ا جم جہ، جہ) کو ملاتا ہے ۔ ب ج کی قطبی مساوات معلوم کرنے کے لیے عام شکل ع = ر جم (طہ - فہ) لو (دفعہ ۵۴) اور ب اور ج کے محدد درج کرو ۔ اس طرح ع اور فہ کو معلوم کرنے کے لیے دو مساواتیں حاصل ہونگی یہ مساواتیں

ع = ۲ ا (جم بہ) جم (بہ - فہ)

اور ع = ۲ ا جم جہ جم (جہ - فہ)

(۹) ہونگی ۔ پس فہ = بہ + جہ اور ع = ۲ ا جم بہ جم جہ ۔ اس لیے ب ج کی مساوات

۲ ا جم بہ جم جہ = ر جم (طہ - بہ - جہ)، .... (۱)

ہے ۔

اسی طرح ج ا اور ا ب کی مساواتیں علی الترتیب

۲ ا جم جہ جم عہ = ر جم (طہ - جہ - عہ)، .... (۲)

اور ۲ ا جم عہ جم بہ = ر جم (طہ - عہ - بہ)، .... (۳)

ہونگی ۔

خطوں (۱)، (۲)، (۳) پر نقطہ و سے عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے پائین کے محدد علی الترتیب (۲ ا جم بہ جم جہ، بہ + جہ)، (۲ ا جم جہ جم عہ، جہ + عہ) (۲ ا جم عہ جم بہ، عہ + بہ) ہوں گے ۔ یہ تینوں نقطے سب کے سب اس خط مستقیم پر ہیں جس کی مساوات

۲ ا جم عہ جم بہ جم جہ = ر جم (طہ - عہ - بہ - جہ)، ...... (۴)

ہے ۔

عمودوں کے پائین میں سے گذرنے والے اس خط کو مثلث کے لحاظ سے نقطہ و کا خطِ پائین کہتے ہیں ۔

فرض کرو کہ دائرہ پر دوسرا نقطہ د ہے اور اس کا زاویئی محدد ضہ ہے ۔

چار نقطوں ا، ب، ج، د میں سے تین تین کو چار طریقوں سے لیا جا سکتا ہے اور اس طرح چار مثلثوں کے جواب میں و کے چار خطوط پائین حاصل ہوں گے۔ ہم نے اِن میں سے ایک خط پائین کی مساوات معلوم کی ہے یعنے مساوات (۴)۔ دیگر تین کی مساواتیں تشاکل سے لکھ لی جا سکتی ہیں چنانچہ یہ مساواتیں

۲ ا جم بہ جم جہ جم ضہ = رجم (طہ - بہ - جہ - ضہ)، ..... (۵)

۲ ا جم جہ جم ضہ جم عہ = رجم (طہ - جہ - ضہ - عہ)، ...... (۶)

اور ۲ ا جم ضہ جم عہ جم بہ = رجم (طہ - ضہ - عہ - بہ)، ...... (۷)

ہوں گی۔

خطوں (۴)، (۵)، (۶) اور (۷) پر نقطہ و سے عمودوں کے پائین کے محدد (۲ ا جم عہ جم بہ جم جہ، عہ + بہ + جہ)، وغیرہ ہوں گے۔ یہ چار نقطے سب کے سب اُس خط پر ہیں جس کی مساوات

۲ ا جم عہ جم بہ جم جہ جم ضہ = رجم (طہ - عہ - بہ - جہ - ضہ)

ہے۔

صریحاً اس مسئلہ کی توسیع کیجا سکتی ہے۔

(۵) خطوطِ مستقیم ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرنے والے خطوں کی مساواتیں معلوم کرنا۔

دیے ہوئے خطوطِ مستقیم اور کسی دائرہ لا^2 + ۲ لا ما جم سہ + ما^2 - ر^2 = ۰ کے نقاطِ تقاطع میں سے جہاں دائرہ کا مرکز اِن خطوں کا نقطہ تقاطع ہے متوازی خطوطِ مستقیم کے دو زوج کھینچے جا سکتے ہیں جن میں سے ہر زوج مطلوبہ ناصفوں میں سے ایک کے متوازی ہوگا۔

اب صریحاً ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + لہ (لا^2 + ۲ لا ما جم سہ + ما^2 - ر^2) = ۰، ...(۱)

خطوط اور دائرہ کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرتا ہے اور (۱) سے دو متوازی خطوطِ مستقیم تعبیر ہوتے ہیں جو

(ا + لہ) لا^2 + ۲ (ھ + لہ جم سہ) لا ما + (بہ + لہ) ما^2 = ۰، ...... (۲)

سے تعبیر شدہ خطوطِ مستقیم کے متوازی ہیں بشرطیکہ (۲) کا دائیں جانبی رکن ایک کامل

مربع ہو جس کے لیے یہ شرط ہے کہ

(ا + لہ) (ب + لہ) - (ھ + لہ جم سہ)^2 = ۰، ...... (۳)

مزید بریں جب شرط (۳) پوری ہوتی ہے تو (۲) سے تعبیر شدہ منطبق خطوط کا (۹۹)
زوج

{(ا + لہ) لا + (ھ + لہ جم سہ) ما}^{2} = ۰

سے یا {(ھ + لہ جم سہ) لا + (ب + لہ) ما}^{2} = ۰

سے حاصل ہوتا ہے -

پس مطلوبہ ناصفوں میں سے ایک

ا لا + ھ ما + لہ (لا + ما جم سہ) = ۰

سے یا ھ لا + ب ما + لہ (ما + لا جم سہ) = ۰

سے حاصل ہوتا ہے جہاں لہ، دو درجی (۳) کی ایک اصل ہے -

اِن آخری دو مساواتوں سے لہ کو ساقط کرنے سے ناصفوں کی مطلوبہ مساوات حاصل ہوتی ہے یعنے

(ا لا + ھ ما)(ما + لا جم سہ) - (ھ لا + ب ما)(لا + ما جم سہ) = ۰

یعنے لا^2(ھ - ا جم سہ) - ما^2(ھ - ب جم سہ) = (ا - ب) لا ما (دیکھو دفعہ ۳۹)

(۶) چار دائروں کے مرکز ا، ب، ج، د ہیں اور اِن میں سے ہر دائرہ ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کرتا ہے - اِن کے مستوی میں کسی نقطہ سے اُن چار دائروں کے مماسوں کے مربع م$_1^2$، م$_2^2$، م$_3^2$، م$_4^2$ ہیں - ثابت کرو کہ

م$_1^2$ △ ب ج د - م$_2^2$ △ ج د ا + م$_3^2$ △ د ا ب - م$_4^2$ △ ا ب ج = ۰

اُس نقطہ کو جس سے مماس کھینچے گئے ہیں مبداء قرار دو اور فرض کرو کہ دائرہ

لا^2 + ما^2 - ۲ گ لا - ۲ ف ما + ج = ۰

دائروں

$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - 2\text{گ}_1\,\text{لا} - 2\text{ف}_1\,\text{ما} + \text{م}_1^2 = 0$، وغیرہ

سے علی القوائم منقطع ہوتا ہے۔

تب

$$\text{گ}\,\text{گ}_1 + \text{ف}\,\text{ف}_1 - \text{ج} - \text{م}_1^2 = 0,$$
$$\text{گ}\,\text{گ}_2 + \text{ف}\,\text{ف}_2 - \text{ج} - \text{م}_2^2 = 0,$$ وغیرہ

اس لیے

$$\begin{vmatrix} \text{گ}_1 & \text{ف}_1 & 1 & \text{م}_1^2 \\ \text{گ}_2 & \text{ف}_2 & 1 & \text{م}_2^2 \\ \text{گ}_3 & \text{ف}_3 & 1 & \text{م}_3^2 \\ \text{گ}_4 & \text{ف}_4 & 1 & \text{م}_4^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore\ \text{م}_1^2\,\Delta(\text{ب ج د}) - \text{م}_2^2\,\Delta(\text{ج د ا}) + \text{م}_3^2\,\Delta(\text{د ا ب}) - \text{م}_4^2\,\Delta(\text{ا ب ج}) = 0$$

کیونکہ ا، نقطہ $(\text{گ}_1، \text{ف}_1)$ ہے وغیرہ۔

(۷) اگر ایک دائرہ پر کوئی چار نقطے ا، ب، ج، د ہوں اور دائرہ کے مستوی میں و کوئی نقطہ ہو تو

$$\text{و ا}^2 \times \Delta\,\text{ب ج د} - \text{و ب}^2 \times \Delta\,\text{ج د ا} + \text{و ج}^2 \times \Delta\,\text{د ا ب} - \text{و د}^2 \times \Delta\,\text{ا ب ج} = 0.$$

بطلیموس کا مسئلہ اخذ کرو۔

و کو مبداء قرار دو اور فرض کرو کہ نقطہ ا کے محدد $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ ہیں وغیرہ۔

دائرہ ب ج د

$$\begin{vmatrix} \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 & \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & 1 \\ \text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 & \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ \text{لا}_3^2 + \text{ما}_3^2 & \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \\ \text{لا}_4^2 + \text{ما}_4^2 & \text{لا}_4 & \text{ما}_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(۱۰۰) ہے - اگر یہ دائرہ نقطہ (لا۱، ما۱) میں سے گذرے تو

$$\begin{vmatrix} \text{و ا}^2 & \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & 1 \\ \text{و ب}^2 & \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ \text{و ج}^2 & \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \\ \text{و د}^2 & \text{لا}_4 & \text{ما}_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

یعنے $\text{و ا}^2 \times \Delta\,\text{ب ج د} - \text{و ب}^2 \times \Delta\,\text{ج د ا} + \text{و ج}^2 \times \Delta\,\text{د ا ب}$

$- \text{و د}^2 \times \Delta\,\text{ا ب ج} = 0$

و کے تمام مقامات کے لیے یہ درست ہے - اِس لیے اگر دائرہ ا ب ج د کے مُستوی میں کوئی چار نقطے ف، ق، ر، س ہوں تو

$\text{ف ا}^2 \times \Delta_1 - \text{ف ب}^2 \times \Delta_2 + \text{ف ج}^2 \times \Delta_3 - \text{ف د}^2 \times \Delta_4 = 0$،

$\text{ق ا}^2 \times \Delta_1 - \text{ق ب}^2 \times \Delta_2 + \text{ق ج}^2 \times \Delta_3 - \text{ق د}^2 \times \Delta_4 = 0$، وغیرہ

پس Δ_1، Δ_2، Δ_3، Δ_4 کو ساقط کرنے پر

$$\begin{vmatrix} \text{ف ا}^2 & \text{ف ب}^2 & \text{ف ج}^2 & \text{ف د}^2 \\ \text{ق ا}^2 & \text{ق ب}^2 & \text{ق ج}^2 & \text{ق د}^2 \\ \text{ر ا}^2 & \text{ر ب}^2 & \text{ر ج}^2 & \text{ر د}^2 \\ \text{س ا}^2 & \text{س ب}^2 & \text{س ج}^2 & \text{س د}^2 \end{vmatrix} = 0$$

جہاں ا، ب، ج، د ایک دائرہ پر ہیں اور ف، ق، ر، س دائرہ کے مستوی میں کوئی چار نقطے ہیں

اب فرض کرو کہ ف، ا پر منطبق ہوتا ہے، ق، ب پر منطبق ہوتا ہے، وغیرہ تو

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{اب}^2 & \text{اج}^2 & \text{اد}^2 \\ \text{با}^2 & 0 & \text{بج}^2 & \text{بد}^2 \\ \text{جا}^2 & \text{جب}^2 & 0 & \text{جد}^2 \\ \text{دا}^2 & \text{دب}^2 & \text{دج}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

یعنے $\text{اب} \times \text{جد} \pm \text{اج} \times \text{بد} \pm \text{اد} \times \text{بج} = 0$

اور یہ بطلیموس کا مسئلہ ہے۔

(۸) اگر دائروں ب ج د، ج د ا، د ا ب، ا ب ج کے مرکز و_1، و_2، و_3، و_4 اور نصف قطر ر_1، ر_2، ر_3، ر_4 ہوں جہاں ا، ب، ج، د ایک مستوی میں کوئی چار نقطے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$(\text{ا و}_1^2 - \text{ر}_1^2)^{-1} - (\text{ب و}_2^2 - \text{ر}_2^2)^{-1} + (\text{ج و}_3^2 - \text{ر}_3^2)^{-1}$$
$$- (\text{د و}_4^2 - \text{ر}_4^2)^{-1} = 0$$

دائرہ ب ج د

$$\begin{vmatrix} \text{لا}^2 + \text{ما}^2 & \text{لا} & \text{ما} & 1 \\ \text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 & \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ \text{لا}_3^2 + \text{ما}_3^2 & \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \\ \text{لا}_4^2 + \text{ما}_4^2 & \text{لا}_4 & \text{ما}_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ہے - اب

$$\text{ا و}_1^2 - \text{ر}_1^2 = \begin{vmatrix} \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 & \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & 1 \\ \text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 & \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ \text{لا}_3^2 + \text{ما}_3^2 & \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \\ \text{لا}_4^2 + \text{ما}_4^2 & \text{لا}_4 & \text{ما}_4 & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \\ \text{لا}_4 & \text{ما}_4 & 1 \end{vmatrix}$$

پس $\sum \left(\text{۱ ق}_1^2 - \text{ر}_1^2 \right)^{-1} = 0$ بشرطیکہ (۱۰۱)

$$\begin{vmatrix} \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \\ \text{لا}_4 & \text{ما}_4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & 1 \\ \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \\ \text{لا}_4 & \text{ما}_4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & 1 \\ \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ \text{لا}_4 & \text{ما}_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & 1 \\ \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

یعنے اگر

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & 1 \\ 1 & \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ 1 & \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \\ 1 & \text{لا}_4 & \text{ما}_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

چوتھے باب پر مثالیں

۱ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے فاصلہ کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے ایک ثابت خطِ مستقیم سے اس کا عمودی فاصلہ ثابت کرو کہ یہ نقطہ ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔

۲ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک مربع کے چار ضلعوں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۳ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ن ثابت نقطوں سے اسکے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۴ ــ ا اور ب دو ثابت نقطے ہیں اور نقطہ ف اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ف ا = ن × ف ب ۔ ثابت کرو کہ ف کا طریق ایک دائرہ ہے ۔ نیز ثابت کرو کہ ن کی مختلف قیمتوں کے لیے جو دائرے حاصل ہوتے ہیں سب کے سب ایک مشترک بنیادی محور رکھتے ہیں ۔

۵ ــ ایک نقطہ کا طریق معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک متساوی الاضلاع مثلث کے قاعدے سے اس کے فاصلہ کا مربع اُس مستطیل کے مساوی ہوتا ہے جو مثلث کے دیگر ضلعوں سے اس کے فاصلوں سے بنتا ہے ۔

۶ ــ ثابت کرو کہ خطوط لا + ما = ۶ ، ۲ لا + ما = ۴ اور لا + ۲ ما = ۵ سے بننے والے مثلث کے حائط دائرہ کی مساوات

لا۲ + ما۲ ـ ۱۷ لا ـ ۱۹ ما + ۵۰ = ۰

ہے ۔

۷ ــ اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا قطر دائروں

لا۲ + ما۲ + ۲ لا + ۳ ما + ۱ = ۰ ، لا۲ + ما۲ + ۴ لا + ۳ ما + ۲ = ۰

کا مشترک وتر ہے ۔

۸ ــ اُن خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خط لا + ۲ ما ـ ۳ = ۰ اور (۲-۱)
دائرہ لا۲ + ما۲ ـ ۲ لا ـ ۲ ما = ۰ کے نقاطِ تقاطع کو مبدا ، سے ملاتے ہیں ؛ اور ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں ۔

۹ ــ ایک ثابت نقطہ و سے کوئی خطِ مستقیم کھینچا گیا ہے جو ایک ثابت خطِ مستقیم سے نقطہ ف پر ملتا ہے ۔ اگر خط پر ایک ایسا نقطہ ق لیا جائے کہ مستطیل و ق × و ف مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے ۔

۱۰ ــ ایک ثابت نقطہ و سے کوئی خطِ مستقیم کھینچا گیا ہے جو ایک ثابت دائرہ سے ف پر ملتا ہے اور خط پر ایک ایسا نقطہ ق لیا گیا ہے کہ مستطیل و ق × و ف مستقل ہے ۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے ۔

۱۱ ــ چار خطوطِ مستقیم کی مساواتیں علی الترتیب ا ـ ما ـ ۲ = ۰ ، ۲ لا ـ ما ـ ۳ = ۰ ، لا + ۴ ما ـ ۶ = ۰ ، اور لا + ۵ ما ـ ۸ = ۰ ہیں ۔ ثابت کرو کہ اِس

ذوار بعۃ الاضلاع کے تین وتروں کے سرے (۱، -۱) اور (-۲، ۲)، (۲، ۱)
اور (۳، ۱)، اور ($\frac{۱۴}{۵}$، $\frac{۴}{۵}$) اور ($\frac{۲۳}{۱۱}$، $\frac{۱۳}{۱۱}$) ہیں - اس سے ثابت کرو کہ
وہ تین دائرے جن کے قطر یہ وتر ہیں ہم محور ہیں -

[بنیادی محور ۲ لا + ما - ۱۱ = ۰ ہے -]

۱۲ — ایک ذوار بعۃ الاضلاع کے ضلعوں کی مساواتیں علی الترتیب
ما - ۱ = ۰، لا - ما + ۱ = ۰، لا + ۵ ما - ۱۱ = ۰، اور ۳ لا + ما - ۱۳ = ۰ ہیں - اُن
دائروں کی مساواتیں معلوم کرو جو اِس ذوار بعۃ الاضلاع کے وتروں کو قطر مانکر
کھینچے گئے ہوں اور ثابت کرو کہ یہ دائرے ہم محور ہیں -

[بنیادی محور ۲ لا + ما - ۸ = ۰ ہے]

۱۳ — ثابت کرو کہ دو دیے ہوئے دائروں کی مساواتیں ہمیشہ شکل
لا^{۲} + ما^{۲} + ا لا + ب = ۰، لا^{۲} + ما^{۲} + اَ لا + ب = ۰
میں لکھی جا سکتی ہیں اور یہ کہ ان میں سے ایک دائرہ دوسرے کے اندر ہوگا اگر
ا اَ اور ب دونوں مثبت ہوں -

۱۴ — ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے مرکز سے دو نقطوں کے فاصلے اُن
فاصلوں کے متناسب ہوتے ہیں جو اِن نقطوں میں سے ہر ایک کے دوسرے
کے قطبی سے ہیں -

۱۵ — اگر دو دیے ہوئے دائروں کے مشابہت کے مرکزوں کو ملانیوالے
خط پر اس کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اِس دائرہ پر کے
کسی نقطہ سے دیے ہوئے دائروں کے مماس متناظر نصف قطروں کی نسبت
میں ہوتے ہیں -

(۱۰۳) ۱۶ — ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو کہ اس سے دو ہم مرکز دائروں کے
مماس اِن کے نصف قطروں کے بالعکس متناسب ہوں -

۱۷ — ثابت کرو کہ دائروں لا^{۲} + ما^{۲} + ۲ لا = ۰، اور لا^{۲} + ما^{۲} - ۲ لا = ۰
کے مشترک مماس ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں -

۱۸ — خط لا = ج دائرہ لا² + ما² + ۲گ لا - ب² = ۰ کو نقطوں ف، فَ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر (۰، ب)، (۰، -ب) سے ف یا فَ پر کے مماس پر عمود کھینچے جائیں تو اِن عمودوں کا حاصل ضرب، گ کی تمام قیمتوں کے لیے، ج² کے مساوی ہے۔

۱۹ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک منتظم کثیر الاضلاع کے ضلعوں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۲۰ — ایک دائرہ ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرتا ہے اور و میں سے گذرنے والے دو خطوطِ مستقیم کو جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں نقاط ف، ق پر قطع کرتا ہے اور خط ف ق ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ دائرہ کے مرکز کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۱ — نقاط (ا، عہ) اور (ب، بہ) کو ملانے والے خط کو قطر مانکر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اِس دائرہ کی قطبی مساوات

ر² - ر {ا جم (طہ - عہ) + ب جم (طہ - بہ)} + اب جم (عہ - بہ) = ۰

ہے۔

۲۲ — اُس دائرہ اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع پر ر کی قیمتیں معلوم کرنیکے لیے مساوات معلوم کرو جن کی مساواتیں علی الترتیب

ر = ۲ ا جم طہ اور ر جم (طہ - بہ) = ع

ہیں۔ ع کی قیمت متعین کرو جبکہ خطِ مستقیم ایک مماس ہو جائے۔

۲۳ — ایک مثلث کے ضلعوں کی مساواتیں

۳لا - ۴ما = ۰، ۷لا - ۲۴ما = ۰، اور ۵لا - ۱۲ما - ۳۶ = ۰

ہیں۔ اس کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدد معلوم کرو۔

۲۴ — ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جس کے قطبی بلحاظ دو دیے ہوئے دائروں کے ایک دوسرے کے ساتھ معلومہ زاویہ بنائیں۔

۲۵ — دو دائروں کے بنیادی محور پر کے کسی نقطہ سے اِن دائروں کے مماس کھینچے گئے ہیں اور وہ خطوط جو نقاطِ تماس کو دائروں کے مرکزوں سے ملاتے ہیں خارج کئے گئے ہیں تاکہ وہ ایک دوسرے سے ملیں۔ اِن کے نقطہ تقاطع کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۶ — اگر وہ چار نقطے جن میں دو دائرے

لا^{2} + ما^{2} + ا لا + ب ما + ج = ۰، لا^{2} + ما^{2} + اَ لا + بَ ما + جَ = ۰

خطوطِ مستقیم

ا لا + ب ما + ج = ۰، اَ لا + بَ ما + جَ = ۰

سے منقطع ہوتے ہیں ایک دوسرے دائرہ پر واقع ہوں تو ثابت کرو کہ

ا - اَ	ب - بَ	ج - جَ
ا	ب	ج
اَ	بَ	جَ

= ۰

۲۷ — دو ثابت نقطوں میں سے دائروں کا ایک نظام کھینچا گیا ہے اور ایک دیئے ہوئے خطِ مستقیم کے متوازی اِن دائروں کے مماس کھینچے گئے ہیں۔ نقاطِ تماس کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۲۸ — اگر تین ہم مرکز دائروں کے مرکز ا، ب، ج ہوں اور کسی نقطہ سے اِن کے مماس م$_{1}$، م$_{2}$، م$_{3}$ ہوں تو رشتہ

ب ج م$_{1}^{2}$ + ج ا م$_{2}^{2}$ + ا ب م$_{3}^{2}$ = ۰

کو ثابت کرو۔

۲۹ — اگر کسی نقطہ سے تین دیے ہوئے دائروں کے مماس طول میں م$_{1}$، م$_{2}$، م$_{3}$ ہوں جہاں دائروں کے مرکز ایک ہی خطِ مستقیم میں نہیں ہیں تو ثابت کرو کہ کوئی دائرہ یا کوئی خطِ مستقیم شکل

ا م$_{1}^{2}$ + ب م$_{2}^{2}$ + ج م$_{3}^{2}$ = د

کی ایک مساوات سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔

خطوطِ مستقیم کے لیے ا، ب، ج کے درمیان کون سا رشتہ درست رہتا ہے۔

۳۰ — ایک دائرہ تین دیے ہوئے دائروں کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کے مرکز کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

۳۱ — خط $\frac{لا}{ھ} + \frac{ما}{ک} - ۱ = ۰$ کے قطبوں کا طریق، جبکہ قطب اُن دائروں کے لحاظ سے لیے گئے ہوں جو قائم محوروں کو مس کرتے ہیں مساواتوں

$$(ھ لا - ک ما)(ھ ما - ک لا) + ھ ک (ھ \pm ک)(لا \pm ما) = ۰$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

۳۲ — ثابت کرو کہ وہ تمام دائرے جو دو ثابت دائروں کو مس کرتے ہیں دو دوسرے ثابت دائروں میں سے ایک کے علی القوائم ہوتے ہیں۔

۳۳ — اگر دو دائرے علی القوائم متقاطع ہوں تو ثابت کرو کہ اِن کے مشترک قطر پر نقطوں کے جوڑوں کی لامتناہی تعداد معلوم کی جا سکتی ہے ایسے کہ اِن میں سے کسی ایک نقطہ کا قطبی بلحاظ ایک دائرہ کے وہی ہو جو دوسرے نقطہ کا قطبی بلحاظ دوسرے دائرہ کے ہے۔ نیز ثابت کرو کہ نقطوں کے کسی ایسے زوج کا درمیانی فاصلہ دو دائروں کے نقاطِ تقاطع میں سے ایک پر قائمہ زاویہ بناتا ہے۔

۳۴ — اگر دو دائروں کی مساواتیں جن کے نصف قطر ا، اَ ہیں س = ۰، سَ = ۰ ہوں تو دائرے

$$\frac{س}{ا} \mp \frac{سَ}{اَ} = ۰$$

علی القوائم متقاطع ہوں گے۔

۳۵ — دو باہم علی القوائم خطوطِ مستقیم کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو جن میں سے ہر ایک دو دائروں

$$(لا - ا)^۲ + ما^۲ = ب^۲ ، (لا + ا)^۲ + ما^۲ = ج^۲$$

میں سے ایک کو مس کرے ۔ نیز ثابت کرو کہ اِن خطوطِ مستقیم کے درمیانی زاویوں کے ناصف ہمیشہ دو دوسرے ثابت دائروں میں سے ایک یا دوسرے کو مس کرتے ہیں

۳۶ ۔ ایک مثلث کے راس علی الترتیب (۰،۰)، (۴۸، ۲۰)، اور (۶۳،۰) ہیں ۔ ثابت کرو کہ نو نقطی دائرہ کی مساوات

$$۲لا^{۲} + ۲ما^{۲} - ۱۵۹لا - ۵۶ما + ۳۰۲۴ = ۰$$

ہے اور اندرونی دائرہ کی مساوات

$$لا^{۲} + ما^{۲} - ۹۰لا - ۱۸ما + ۲۰۲۵ = ۰$$

ہے ۔

ثابت کرو کہ یہ دو دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں ۔

متفرق امثلہ (۱) (۱۰۶)

۱ — ثابت کرو کہ مبدا، اُس مثلث کے اندر ہے جس کے راس (۲، ۱)، (۳، -۲) اور (-۴، -۱) ہیں۔

۲ — ایک مُربع کا ایک راس نقطہ (۳، ۴) پر ہے اور ایک وتر خط ۳ لا + ۴ ما = ۲۰ پر ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز $\left(\frac{۱۲}{۵}، \frac{۱۶}{۵}\right)$ ہے اور وہ دو راس جو دیے ہوئے وتر پر ہیں $\left(\frac{۱۶}{۵}، \frac{۱۳}{۵}\right)$ اور $\left(\frac{۸}{۵}، \frac{۱۹}{۵}\right)$ ہیں۔

۳ — ایک دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو جو نقطہ (۰، ۰) میں سے گذرتا ہے اور خط لا = ج سے طول ۲ ل قطع کرتا ہے۔

جواب: ما^2 + ۲ ج لا = ج^2 + ل^2

۴ — اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا نصف قطر ۳ ہے اور جو دائرہ لا^2 + ما^2 - ۴ لا - ۲ ما - ۲۰ = ۰ کو داخلاً نقطہ (-۱، -۱) پر مس کرتا ہے۔

جواب: ۵ لا^2 + ۵ ما^2 - ۸ لا - ۱۴ ما - ۳۲ = ۰

---

۵ — اُس مثلث کا رقبہ معلوم کرو جس کے ضلع اُن تین خطوں پر ہیں جن کی مساواتیں

لا - ما + ۱ = ۰، لا + ما - ۷ = ۰، اور لا - ۳ ما + ۴ = ۰

ہیں۔ جواب: $\frac{۲۵}{۸}$

۶ — اُس خط کی مساوات معلوم کرو جو ۳ لا + ۲ ما + ۱ = ۰ اور لا + ما - ۳ = ۰ کے نقطہ تقاطع کو ۳ لا + ۲ ما - ۱ = ۰ اور لا + ما - ۵ = ۰ کے نقطہ

تقاطع سے ملاتا ہے۔ جواب : ۲لا + ما + ۴ = ۰

۷ — ایک دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا نصف قطر ۵ ہے اور جو دائرہ لا^{2} + ما^{2} - ۲لا - ۴ما - ۲۰ = ۰ کو خارجاً نقطہ (۵، ۵) پر مس کرتا ہے۔

جواب : لا^{2} + ما^{2} - ۱۸لا - ۱۶ما + ۱۲۰ = ۰

۸ — اُس مثلث کے حائط دائرہ اور اندرونی دائرہ کی مساواتیں معلوم کرو جو تین خطوں لا ما (۳لا + ۴ما - ۱۲) = ۰ سے بنتا ہے اور ثابت کرو کہ دائروں کا بنیادی محور ۲لا + ما + ۱ = ۰ ہے۔

---

۹ — ثابت کرو کہ وہ خطوط جو نقطہ (۳، ۴) میں سے گذرتے ہیں اور خط لا + ۴ما - ۱۰ = ۰ کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتے ہیں ۳لا - ۵ما + ۱۱ = ۰ اور ۵لا + ۳ما - ۲۷ = ۰ ہیں۔

۱۰ — اُن دو خطوطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خطوط

۶لا^{2} - لاما - ما^{2} + لا + ۱۲ما - ۳۵ = ۰

کے ساتھ ایک ایسا متوازی الاضلاع بنائیں جس کے وتر مبداء پر متقاطع ہوں۔

جواب : ۶لا^{2} - لاما - ما^{2} - لا - ۱۲ما - ۳۵ = ۰

۱۱ — اگر نقطہ (۰، ۰) سے دائرہ لا^{2} + ما^{2} + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ کے مماس و ف، و ق ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ و ف ق کی مساوات لا^{2} + ما^{2} + گ لا + ف ما = ۰ ہے۔

۱۲ — اُن دو مماسوں کی مساوات معلوم کرو جو مبداء سے دائرہ

لا^{2} + ما^{2} + ۱۰ (لا + ما) + ۴۰ = ۰

کے کھینچے جا سکتے ہیں اور اِن کا درمیانی زاویہ معلوم کرو

جواب : مس$^{-1}$ $\frac{۴}{۳}$

---

۱۳ — اُس مستطیل کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو جو خطوط

ا(لا - ۳) + ب ما = ۰، ا(لا - ۴) + ب ما = ۰،

ب لا ـ ا (ما ـ ۳) = ۰، اور ب لا ـ ا (ما ـ ۲) = ۰

سے بنتا ہے۔ جواب: (ا ـ ب) لا + (ا + ب) ما = ۶ ا،

(ا + ب) لا ـ (ا ـ ب) ما = ا

۱۴ ــ ۳ لا ـ ما ـ ۲۰ = ۰ اور لا ـ ۲ ما ـ ۵ = ۰ کے نقطہ تقاطع میں سے گذرنے والے وہ خطوط معلوم کرو جو مبدا سے فاصلہ ۵ پر ہیں۔

جواب: ۳ لا + ۴ ما ـ ۲۵ = ۰، ۴ لا ـ ۳ ما ـ ۲۵ = ۰

۱۵ ــ ثابت کرو کہ دو دائرے

لا۲ + ما۲ + ۲ ا لا + ج = ۰،

لا۲ + ما۲ + ۲ ب ما + ج = ۰

ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اگر ۱/ا۲ + ۱/ب۲ = ۱/ج

۱۶ ــ ثابت کرو کہ اُس مثلث کا مرکزِ عمودی جس کے راس (ا جم عہ، ا جب عہ)، (ا جم بہ، ا جب بہ) اور (ا جم جہ، ا جب جہ) ہیں نقطہ (ا ∑ جم عہ، ا ∑ جب عہ) ہے۔

پس ثابت کرو کہ کسی مثلث کا مرکزِ ہندسی، حائط مرکز اور مرکزِ عمودی کو ملانے والے خط کو نسبت ۱ : ۲ میں تقسیم کرتا ہے۔

(۱۰۸) ۱۷ ــ ایک مثلث کے ضلع ۴ ما + ۳ لا = ۰، ۱۲ ما ـ ۵ لا = ۰، اور ما ـ ۱۵ = ۰ ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے اندرونی دائرہ اور تین جانبی دائروں کے مرکز علی الترتیب (۱، ۸)، (ـ ۲۴، ۳) (۴۰، ـ ۵) اور (۱۵، ۱۲۰) ہیں۔

۱۸ ــ ثابت کرو کہ مساواتوں

۱۲ لا۲ + ۷ لا ما ـ ۱۲ ما۲ = ۰، ۱۲ لا۲ + ۷ لا ما ـ ۱۲ ما۲ ـ لا + ۷ ما ـ ۱ = ۰

سے تعبیر شدہ خطوطِ مستقیم ایک مربع کے ضلعوں پر ہیں۔

۱۹ ــ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر نقطوں (ا م۲، ۲ ا م)، (ا/م۲، ـ ۲ا/م)

کو ملانے والا خطِ مستقیم ہے م کی تمام قیمتوں کے لیے لا + ا = ۰ کو مس کرتا ہے۔

۲۰ — ثابت کرو کہ چار نقطے $(ا م_۱، \frac{ا}{م_۱})$، $(ا م_۲، \frac{ا}{م_۲})$، $(ا م_۳، \frac{ا}{م_۳})$ اور $(ا م_۴، \frac{ا}{م_۴})$ ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں اگر $م_۱ م_۲ م_۳ م_۴ = ۱$

---

۲۱ — ثابت کرو کہ مساوات

$$اب لا^{۲} + (ا^{۲} + ب^{۲}) لا ما + اب ما^{۲} + اب (ا - ب)(لا - ما) - ا^{۲} ب^{۲} = ۰$$

دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبداء سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔

۲۲ — اُس مستطیل کے وتروں کی مساواتیں معلوم کرو جس کے اضلاع مساواتوں

$$(۳ لا + ۴ ما)^{۲} - ۴۹ = ۰ \quad اور \quad (۴ لا - ۳ ما)^{۲} - ۳۶ = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۲۳ — ثابت کرو کہ دو دائروں $لا^{۲} + ما^{۲} - ۲ ج ما - ا^{۲} = ۰$ اور $لا^{۲} + ما^{۲} - ۲ ب لا + ا^{۲} = ۰$ کے نقاطِ تقاطع، اِن کے مرکز اور محددوں کا مبداء ایک دائرہ پر ہیں۔

۲۴ — $لا^{۲} + ما^{۲} - ۴ لا - ۲ ما + ۴ = ۰$ اور $لا^{۲} + ما^{۲} + ۴ لا + ۲ ما - ۴ = ۰$ کے مشترک مماس معلوم کرو۔

جواب: $لا = ۱$، $ما = ۲$، $۳ لا + ۴ ما = ۵$ اور $۴ لا - ۳ ما - ۱۰ = ۰$

(۱۰۹)

پانچواں باب

قطع مکافی

۸۹ - تعریفیں - مخروطی تراش یا مخروطی ایسے نقطہ کا طریق ہوتا ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ ایک ثابت خطِ مستقیم سے اس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے۔ ثابت نقطہ کو ماسکہ، ثابت خطِ مستقیم کو مرتب اور مستقل نسبت کو **خروج المرکز** کہتے ہیں۔

آئندہ یہ ثابت کیا جائے گا کہ اگر ایک قائم مستدیر مخروط کو کسی مستوی سے قطع کیا جائے تو تمام صورتوں میں ایک مخروطی تراش اوپر کی تعریف کی بموجب حاصل ہوگی۔ چنانچہ اولاً اِن منحنیوں کے خواص کو مخروط کی تراشیں سمجھ کر ہی معلوم کیا گیا تھا۔

اب ہم اِن میں سے سادہ ترین منحنی کی مساوات معلوم کریں گے اور اس کے چند خواص پر بحث کریں گے۔ یہ منحنی وہ ہے جس میں خروج المرکز اکائی کے مساوی ہوتا ہے۔ اس کو **قطع مکافی** یا صرف مکافی کہتے ہیں۔

۹۰ - مکافی کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ س، ماسکہ اور مما مَا مرتب ہے۔ س وَ، مما مَا پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ و س = ۲ ا فرض کرو کہ و س محور لا ہے اور و مما محور ما ہے۔

فرض کرو کہ منحنی پر کوئی نقطہ ن ہے اور اس کے محدد (لا، ما) ہیں۔ محوروں پر ن ل، ن م عمود کھینچو (حسب شکل) اور س ن کو ملاؤ۔

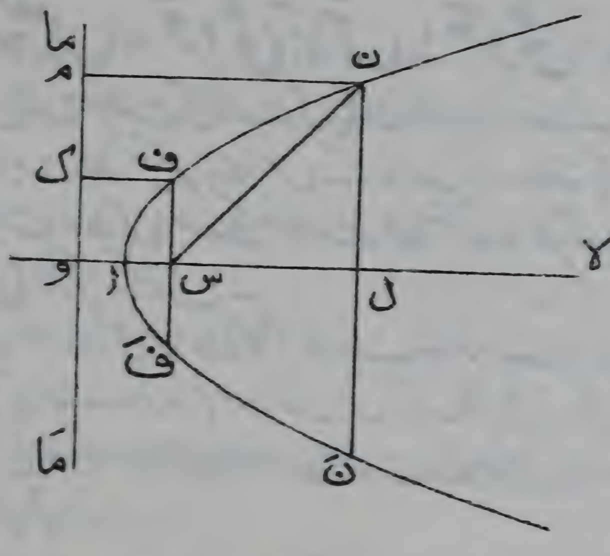
تب بموجب تعریف س ن = ن م

اس لیے ن م^2 = س ن^2 = ن ل^2 + س ل^2

یعنی لا^2 = ما^2 + (لا − ۲ ا)^2

یا ما^2 = ۴ ا (لا − ا) . . . . (۱)

یہ منحنی کی مطلوبہ مساوات ہے۔



منحنی محور لا کو ایک نقطہ ا پر قطع کرتا ہے جہاں ما = ۰ اور (۱) کی رو سے جبکہ ما = ۰ تو لا = ا یعنی و ا = ا۔

نقطہ ا کو مکافی کا راس کہتے ہیں۔

اگر ہم مبدا و کو ا پر منتقل کریں اور محوروں کی سمتوں کو نہ بدلیں

تومساوات (۱) ہو جائے گی (دفعہ ۴۹)

ما^۲ = ۴ ا لا .... (۲)

ماسکہ نقطہ (ا، ۰) ہے اور مرتب خط

لا + ا = ۰

ہے - نیز

س ن = م ن = و ا + ا ل = ا + لا

۹۱ - چونکہ مکافی کی مساوات ما^۲ = ۴ ا لا ہے اور ما^۲ ایک مثبت مقدار ہے اس لیے لا کو ہمیشہ مثبت ہونا چاہیے اور اس لیے منحنی کُلّاً محور لا کی مثبت جانب واقع ہوگا - (۱۱۱)

لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے صریحاً ما کی دو قیمتیں ہیں جو مقدار میں مساوی ہیں لیکن ایک مثبت ہے اور دوسری منفی - اس لیے منحنی کے تمام وتر جو محور لا پر عمود ہوں اس سے تنصیف ہوتے ہیں اور منحنی کے وہ حصے جو محور ما کی مثبت اور منفی جانبوں پر ہیں ہر لحاظ سے مساوی ہیں -

جب، لا بڑھتا ہے تو ما بھی بڑھتا ہے اور لا اور ما کے بڑھنے پر کوئی حد نہیں ہے اس لیے محور لا کی مثبت جانب منحنی کی کوئی حد نہیں ہے -

وہ خط جو ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور مرتب پر عمود ہے مکافی کا محور کہلاتا ہے -

وہ وتر جو ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور محور پر عمود ہے وتر خاص کہلاتا ہے

دفعہ ۹۰ کی شکل میں س ف = ک ف = و س = ۲ ا

اس لیے وتر خاص کا کُل طول ۴ ا ہے -

۹۲ - ہم معلوم کر چکے ہیں کہ مکافی پر تمام نقطوں کے لیے ما^۲ - ۴ ا لا = ۰ - منحنی کے اندر تمام نقطوں کے لیے ما^۲ - ۴ ا لا منفی ہے - کیونکہ اگر ق کوئی ایسا نقطہ ہو اور ق میں سے محور کے عمود وار ایک خط کھینچا جائے جو منحنی سے نقطہ ف پر ملے اور محور سے نقطہ ل پر تو ق، ن کی نسبت محور سے قریب ہوگا اور اس لیے ل ق^۲ < ل ن^۲ - لیکن ن منحنی پر

اِس لیے ل ن^۲ - ۴ ا × ا ل = ۰۔ اور اِس لیے ل ق^۲ - ۴ ا × ا ل منفی ہے۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ منحنی کے باہر تمام نقطوں کے لیے ما^۲ - ۴ ا لا مثبت ہے۔

پس اگر ایک مکافی کی مساوات ما^۲ - ۴ ا لا = ۰ ہو اور اگر ہم اس مساوات کی دائیں جانبی رکن میں کسی نقطہ کے محدد درج کریں تو نتیجہ مثبت ہوگا اگر نقطہ منحنی کے باہر ہے، منفی ہوگا اگر نقطہ منحنی کے اندر ہے، اور صفر ہوگا اگر نقطہ منحنی پر ہے۔

۹۳ — اُن نقطوں کے محدد جو خطِ مستقیم ما = م لا + ج اور قطع مکافی ما^۲ = ۴ ا لا میں مشترک ہیں اِن دونوں مساواتوں کو پورا کرنے چاہییں۔ (۱۱)

پس مشترک نقطہ پر رشتہ

(م لا + ج)^۲ = ۴ ا لا، .... (۱)

حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے مشترک نقطوں کے فصلے مساوات (۱) سے حاصل ہوتے ہیں جس کو شکل

م^۲ لا^۲ + (۲ م ج - ۴ ا) لا + ج^۲ = ۰، .... (۲)

میں لکھا جا سکتا ہے۔

اب چونکہ مساوات (۲) ایک دو درجی مساوات ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ہر خطِ مستقیم ایک مکافی سے دو نقطوں پر ملتا ہے جو حقیقی، منطبق، یا خیالی ہو سکتے ہیں۔

جب، م بہت چھوٹا ہو تو مساوات (۲) کی ایک اصل بہت بڑی ہوگی اور جب، م صفر کے مساوی ہو تو ایک اصل لا انتہا بڑی ہوگی۔ اس لیے ہر وہ خطِ مستقیم جو مکافی کے محور کے متوازی ہو مکافی سے ایسے دو نقطوں پر ملیگا جن میں سے ایک محدود فاصلہ پر ہوگا اور دوسرا اس سے لا متناہی فاصلہ پر۔

۹۴ — وہ شرط معلوم کرو کہ خط ما = م لا + ج، مکافی ما^۲ - ۴ ا لا = ۰

کو مس کرے۔

حسب دفعہ سابق اُن نقطوں کے فصلے جو خطِ مستقیم اور مکافی میں مشترک ہیں مساوات

(م لا + ج)^۲ = ۴ ا لا

یعنی م^۲ لا^۲ + (۲ م ج − ۴ ا) لا + ج^۲ = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اگر خط مماس ہے یعنے اگر وہ مکافی کو دو منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے تو مساوات کی اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہونی چاہییں۔ اسکے لیے شرط ہے

۴ م^۲ ج^۲ = (۲ م ج − ۴ ا)^۲

جو م ج = ا یا ج = ا/م میں تحویل ہوتی ہے۔

پس خواہ م کچھ بھی ہو خط

ما = م لا + ا/م

مکافی ما^۲ = ۴ ا لا کو مس کرے گا۔

مثال ۱ — خط ما = لا + ۲ مکافی ما^۲ − ۸ لا = ۰ کو مس کرتا ہے۔

مثال ۲ — خط ما = ۳ لا + ۱/۶ مکافی ما^۲ − ۲ لا = ۰ کو مس کرتا ہے۔

۹۵ — اُس خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا جو ایک مکافی پر کے دو دئے ہوئے نقطوں میں سے گذرے۔ نیز اس کے کسی نقطہ پر مماس کی مساوات معلوم کرنا۔ (۱۱۳)

فرض کرو کہ مکافی کی مساوات

ما^۲ = ۴ ا لا

ہے اور فرض کرو کہ اس پر دو نقطوں کے محدد (لا$_1$، ما$_1$) اور (لا$_2$، ما$_2$) ہیں۔

مساوات (ما − ما$_1$)(ما − ما$_2$) = ما^2 − ۴ا لا ‘ .... (۱)

کو مختصر کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ وہ پہلے درجہ کی مساوات ہے اور اس لیے وہ ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔ اگر اس میں لا = لا$_1$ اور ما = ما$_1$ درج کیا جائے تو دائیں جانبی رکن متماثلاً معدوم ہوتا ہے اور بائیں جانبی رکن اس وجہ سے معدوم ہوتا ہے کہ (لا$_1$، ما$_1$) مکافی پر ہے۔

اِس لیے نقطہ (لا$_1$، ما$_1$) خطِ مستقیم (۱) پر ہے اور اسی طرح نقطہ (لا$_2$، ما$_2$) بھی اِس خط پر ہے۔

پس مطلوبہ خط کی مساوات (۱) ہے اور یہ مساوات

ما (ما$_1$ + ما$_2$) − ۴ا لا − ما$_1$ ما$_2$ = ۰ ‘ .... (۲)

میں تحویل ہوتی ہے۔

(لا$_1$، ما$_1$) پر مماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات (۲) میں صرف ما$_2$ = ما$_1$ درج کرنا ہوگا چنانچہ مطلوبہ مساوات

۲ ما ما$_1$ − ۴ا لا − ما$_1^2$ = ۰

ہے یا چونکہ ما$_1^2$ = ۴ا لا$_1$ اس لیے

ما ما$_1$ = ۲ا (لا + لا$_1$) ‘ .... (۳)

دوسرا ثبوت:- (لا$_1$، ما$_1$) اور (لا$_2$، ما$_2$) میں سے گذرنے والے خط کی مساوات [حسب دفعہ ۲۴]

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & 1 \\ \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & 1 \\ \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ہے اور اس لیے

$$\begin{vmatrix} \text{۴ا لا} & \text{ما} & ۱ \\ \text{ما}_۱^۲ & \text{ما}_۱ & ۱ \\ \text{ما}_۲^۲ & \text{ما}_۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

اِس آخری مقطع کو پھیلاؤ اور $\text{ما}_۲ - \text{ما}_۱$ سے تقسیم کرو، تب حسب سابق وتر کی مساوات

$$\text{ما}(\text{ما}_۱ + \text{ما}_۲) - \text{۴ا لا} - \text{ما}_۱ \text{ما}_۲ = ۰$$

حاصل ہو گی۔

نتیجہ صریح :- نقطہ (۰، ۰) پر مماس لا = ۰ ہے یعنی راس پر کا مماس محور کے عمود وار ہوتا ہے۔

۹۶ — ہم نے دو مختلف طریقوں (دفعات ۹۴ اور ۹۵) سے مکانی کے (۱۱۴)
مماس کی مساوات کی دو شکلیں حاصل کی ہیں۔ ان میں سے کسی ایک شکل کو دوسری سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ فرض کرو کہ ہم جانتے ہیں کہ (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات

$$\text{ما ماَ} = \text{۲ا}(\text{لا} + \text{لاَ})$$

ہے۔ تب

$$\text{ما} = \frac{\text{۲ا}}{\text{ماَ}}\,\text{لا} + \frac{\text{۲ا لاَ}}{\text{ماَ}}$$

اگر یہ وہی خط ہو جو مساوات

$$\text{ما} = \text{م لا} + \text{ج}$$

سے حاصل ہوتا ہے تو

$$\text{م} = \frac{\text{۲ا}}{\text{ماَ}} \quad \text{اور} \quad \text{ج} = \frac{\text{۲ا لاَ}}{\text{ماَ}}$$

اس لیے م ج = ا، جیسا کہ دفعہ ۹۴ میں حاصل ہوا تھا۔

سوالات کے حل کرنے میں مماس کی مساوات کی وہ شکل لینی چاہیے جو سہولت بخش معلوم ہو۔

مثال ۱ — ایک مکافی کے دو مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا معین ان مماسوں کے نقاطِ تماس کے معینوں کا اوسط حسابی ہوتا ہے۔

نقاط $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ پر مماسوں کی مساواتیں

$$\text{ما}\,\text{ما}_1 = ۲\,\text{ا}\,(\text{لا} + \text{لا}_1)$$

$$\text{ما}\,\text{ما}_2 = ۲\,\text{ا}\,(\text{لا} + \text{لا}_2)$$

تفریق سے ان کے مشترک نقطہ کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما}\,(\text{ما}_1 - \text{ما}_2) = ۲\,\text{ا}\,\text{لا}_1 - ۲\,\text{ا}\,\text{لا}_2$$

$$= \frac{1}{2}\,(\text{ما}_1^2 - \text{ما}_2^2)$$

$$\therefore\quad \text{ما} = \frac{1}{2}\,(\text{ما}_1 + \text{ما}_2)$$

تب معلوم ہوگا کہ $۴\,\text{ا}\,\text{لا} = \text{ما}_1\,\text{ما}_2$

مثال ۲ — ایک مکافی کے دو مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو جبکہ مماس ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں۔

فرض کرو کہ دو مماسوں کی مساواتیں

$$\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{م}}\ ، \quad \ldots\ldots\ldots\ (۱)$$

$$\text{ما} = \text{مَ}\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{مَ}}\ ، \quad \ldots\ldots\ldots\ (۲)$$

ہیں۔ یہ مماس چونکہ علی القوائم ہیں اس لیے $\text{م}\,\text{مَ} = -۱$ ۔ پس دوسری مساوات لکھی جا سکتی ہے

$$\text{ما} = -\frac{1}{\text{م}}\,\text{لا} - \text{ا}\,\text{م}\ ، \quad \ldots\ldots\ldots\ (۳)$$

ان کا مشترک نقطہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں صرف (۳) کو (۱) میں سے (۱۱۵)
تفریق کرنا ہوگا چنانچہ

$$۰ = \text{لا}\,\left(\text{م} + \frac{1}{\text{م}}\right) + \text{ا}\,\left(\text{م} + \frac{1}{\text{م}}\right)$$

اور اس لیے لا + ا = ۰

پس مطلوبہ طریق کی مساوات لا + ا = ۰ ہے اور یہ (بموجب دفعہ ۹۰) مرتب کی مساوات ہے۔

۹۷ ۔ ایک مکافی کے کسی نقطہ پر عماد کی مساوات معلوم کرنا۔

مکافی ما² − ۴ ا لا = ۰ کے نقطہ (لا₁، ما₁) پر مماس کی مساوات (دفعہ ۹۵)

ما ما₁ = ۲ ا (لا + لا₁)، .... (۱)

ہے۔

عماد وہ خط ہے جو (لا₁، ما₁) میں سے گذرتا ہے اور مماس پر عمود ہے۔ اس لیے اس کی مساوات (دفعہ ۳۰)

(ما − ما₁) ۲ ا + ما₁ (لا − لا₁) = ۰، .... (۲)

ہے۔

چونکہ ۴ ا لا₁ = ما₁² اس لیے اوپر کی مساوات کو شکل

۸ ا² (ما − ما₁) + ما₁ (۴ ا لا − ما₁²) = ۰، .... (۳)

میں لکھا جا سکتا ہے۔ اس کو لکھ سکتے ہیں

ما = − (ما₁ / ۲ ا) لا + ما₁ + (ما₁³ / ۸ ا²)، .... (۴)

اگر ہم م = − (ما₁ / ۲ ا) رکھیں تو ما₁ = − ۲ ا م اور (ما₁³ / ۸ ا²) = − ا م³

اس لیے مساوات (۴) ہو جاتی ہے

ما = م لا − ۲ ا م − ا م³، .... (۵)

عماد کی مساوات کی یہ شکل بعض اوقات مفید ہوتی ہے۔

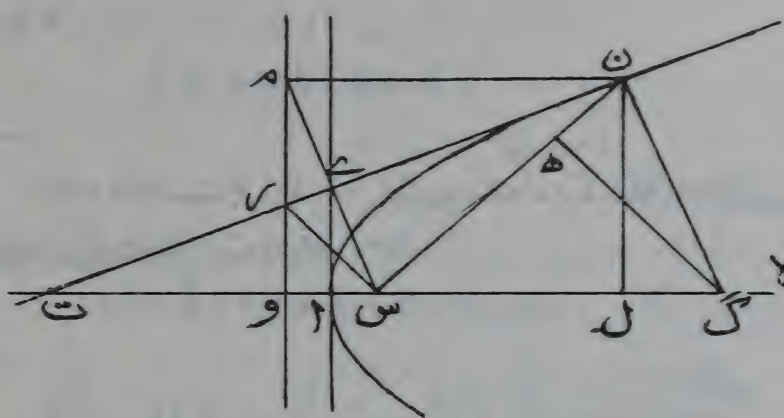
۹۸ ــــ اب ہم مکافی کے چند ہندسی خواص ثابت کریں گے۔

فرض کرو کہ نقطہ ن پر کا مماس مرتب سے ر پر اور محور سے ت پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ ن سے محور پر اور مرتب پر عمود ن ل اور ن م ہیں
فرض کرو کہ ن پر کا عماد ن گ، محور سے گ پر ملتا ہے۔

(۱۱) تب اگر ن کے محدد لا، ما، ہوں تو ن پر کے مماس کی مساوات

ما ما، = ۲ ا (لا + لا،)، .... (۱) [دفعہ ۹۵]

ہوگی۔



یہ مماس محور سے جہاں ملتا ہے وہاں ما = ۰؛ اور اس نقطہ پر (۱) سے حاصل ہوتا ہے

لا + لا، = ۰

∴ ت ا = ا ل، .... (عہ)

∴ ت س = ا س + ا ل = س ن، ...... (بہ)

اور چونکہ ت س = س ن اس لیے زاویہ س ت ن، زاویہ س ن ت کے مساوی ہے اس لیے ن ت، زاویہ س ن م کی تنصیف کرتا ہے۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ مثلثات ت ر س ن اور ر م ن ہر لحاظ سے

مساوی ہیں۔
اِس لیے زاویہ ک س ن = زاویہ ک م ن = ایک زاویہ قائمہ۔..(ضہ)
پھر چونکہ م نقطہ (- ا، ما) ہے اور س نقطہ (ا، ۰) ہے اسلیے
خط س م کی مساوات

$$\frac{ما - ما_۱}{- ما_۱} = \frac{لا + ا}{۲ ا} ; \quad \ldots\ldots\ldots\ (۲)$$

ہے۔ یہ صریحاً نقطہ ن پر کے مماس پر جو مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے
عمود ہے
∴ س م، ن ت پر عمود ہے، ....(صہ)
(۱۱۷) چونکہ س م، ن ت پر عمود ہے اور ن ت زاویہ س ن م
کی تنصیف کرتا ہے اِس لیے وہ س م کی تنصیف کرے گا۔ پس اگر س م
اور ن ت کا نقطہ تقاطع ے ہو تو س ے = ے م۔ لیکن
س ا = ا و۔ اس لیے ا و، و م کے متوازی ہے اور اِس لیے
وہ مکافی کے راس پر مماس ہے۔ پس وہ خط جو مکافی کے ماسکہ میں
سے گذرے اور کسی مماس ن ت پر عمود ہو اِس مماس سے
راس پر کے مماس پر ملتا ہے۔
ہم اِس آخری مسئلہ کو حسب ذیل طریقہ پر ثابت کر سکتے ہیں:۔
فرض کرو کہ مکافی کے کسی مماس کی مساوات

$$ما = م لا + \frac{ا}{م} ، \quad \ldots\ldots\ldots\ (۳)$$

ہے۔ اُس خط کی مساوات جو ماسکہ (ا، ۰) میں سے گذرے اور (۳) پر عمود ہو

$$ما = - \frac{۱}{م} (لا - ا)$$

یا

$$ما = - \frac{لا}{م} + \frac{ا}{م} ، \quad \ldots\ldots\ldots\ (۴)$$

ہے -

خطوط (۳) اور (۴) صریحاً وہاں ملتے ہیں جہاں لا = ۰

نقطہ ن (لا، ما) پر کے عماد کی مساوات

۲ ا (ما - ما) + ما (لا - لا) = ۰

ہے [دفعہ ۹۷] -

نقطہ گ پر ما = ۰ اور اس لیے

- ۲ ا ما + ما (لا - لا) = ۰

یا ۲ ا = لا - لا = اگ - ال = ل گ

∴ ل گ = ۲ ا، .... (۵)

مثالیں

۱ــ مکافی $ما^۲$ - ۴ ا لا = ۰ کے وتر خاص کے سروں پر کے مماسوں کی اور عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو - جواب: لا ∓ ما + ا = ۰،

ما ± لا ∓ ۳ ا = ۰

۲ــ وہ نقطے معلوم کرو جہاں خط ما = ۳ لا - ا، مکافی $ما^۲$ - ۴ ا لا = ۰ کو قطع کرتا ہے - جواب: (ا، ۲ ا)، ($\frac{۱}{۹}$ ا، - $\frac{۲}{۳}$ ا)

۳ــ ثابت کرو کہ مکافی $ما^۲$ - ۴ ا لا = ۰ کے نقطہ (لا، ما) پر کا مماس مکافی کے نقطہ ($\frac{ا^۲}{لا}$، $\frac{-۴ ا^۲}{ما}$) پر کے مماس پر عمود ہے -

۴ــ ثابت کرو کہ خط ما = ۲ لا + $\frac{۱}{۲}$، مکافی $ما^۲$ - ۴ ا لا = ۰ کو منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے -

ثابت کرو کہ وہ ۲۰ $لا^۲$ + ۲۰ $ما^۲$ = $ا^۲$ کو بھی منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے -

۵ — ایک خطِ مستقیم، $لا^{۲} + ما^{۲} = ۲ا^{۲}$ اور $ما^{۲} = ۸ا\,لا$ دونوں کو مس کرتا ہے۔
ثابت کرو کہ اس کی مساوات $ما = \pm (لا + ۲ا)$ ہے۔

۶ — ثابت کرو کہ خط $۷\,لا + ۶\,ما = ۱۳$، منحنی

$$ما^{۲} - ۷\,لا - ۸\,ما + ۱۴ = ۰$$

کو مس کرتا ہے۔

۷ — ثابت کرو کہ مساوات $لا^{۲} + ۴ا\,لا + ۲ا\,ما = ۰$، ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا راس نقطہ $(-۲ا، ۲ا)$ پر ہے اور جس کا وترِ خاص $۲ا$ ہے اور جس کا محور محورِ ما کے متوازی ہے۔

۸ — ثابت کرو کہ وہ تمام مکافی جن کے محور محورِ ما کے متوازی ہیں شکل

$$لا^{۲} + ۲ا\,لا + ۲ب\,ما + ج = ۰$$

کی مساواتوں سے تعبیر ہوتے ہیں۔

۹ — حسبِ ذیل مکافیوں میں سے ہر ایک کے راس کے محدد اور وترِ خاص کا طول معلوم کرو۔

(۱) $ما^{۲} = ۵\,لا + ۱۰$، (۲) $لا^{۲} - ۴\,لا + ۲\,ما = ۰$،

(۳) $(ما - ۲)^{۲} = ۵(لا + ۴)$، (۴) $۳\,لا^{۲} + ۱۲\,لا - ۸\,ما = ۰$

جواب: (۱) $(-۲، ۰)$، ۵ (۲) $(۲، ۲)$، ۲

(۳) $(-۴، ۲)$، ۲ (۴) $(-۲، -\frac{۳}{۲})$، $\frac{۸}{۳}$

۱۰ — مثال ۹ کے مکافیوں میں سے ہر ایک کے ماسکہ کے محدد اور مرتب کی مساوات معلوم کرو۔

جواب (۱) $(-\frac{۳}{۴}، ۰)$، $۴\,لا + ۱۳ = ۰$،

(۲) $(۲، \frac{۳}{۲})$، $۲\,لا - ۵ = ۰$،

(۳) $(-\frac{۱۱}{۴}، ۲)$، $۴\,لا + ۲۱ = ۰$،

(۴) $(-۲، -\frac{۵}{۶})$، $۶\,ما + ۱۳ = ۰$

۱۱ — اُس مکافی کی مساوات لکھو جس کا ماسکہ مبداء پر ہے اور جس کا مرتب خط $۲\,لا - ما - ۱ = ۰$ ہے ثابت کرو کہ خط $۲\,ما = ۴\,لا - ۱$، اِس مکافی کو مس کرتا ہے۔

۱۲ — اگر ایک مکافی کے محور پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے کوئی وتر ن و نَ
کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ ن اور نَ پر کے معینوں کا مستطیل، رقبہ میں مستقل ہوگا۔
نیز ثابت کرو کہ فصلوں کا حاصل ضرب مستقل ہوگا۔

۱۳ — مماسوں ما = م لا + $\frac{ا}{م}$ اور ما = مَ لا + $\frac{ا}{مَ}$ کے نقطۂ تقاطع کے
محدد معلوم کرو۔ ثابت کرو کہ ان کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جبکہ م مَ
مستقل ہو۔ نیز ثابت کرو کہ اگر م مَ + ا = ۰ تو یہ خطِ مرتب ہے۔

۱۴ — ثابت کرو کہ م کی تمام قیمتوں کے لیے خط ما = م (لا + ا) + $\frac{ا}{م}$، (119
مکافی ما^2 = ۴ ا (لا + ا) کو مس کرے گا۔

۱۵ — دو خطوطِ مستقیم باہم علی القوائم ہیں اور ان میں سے ایک، مکافی
۴ ا (لا + ا) کو مس کرتا ہے اور دوسرا، ما^2 = ۴ اَ (لا + اَ) کو۔ ثابت کرو کہ
خطوطِ مستقیم کا نقطۂ تقاطع خط لا + ا + اَ = ۰ پر ہوگا۔

۱۶ — اگر ایک مکافی کے کسی مماس پر محور پر کے دو نقطوں سے جو ماسکہ
سے مساوی فاصلوں پر ہوں عمود کھینچے جائیں تو ان کے مربعوں کا فرق مستقل ہوگا۔

۱۷ — دو خطوطِ مستقیم ا ف اور ا ق کو ایک مکافی کے راس میں سے
ایک دوسرے کے علی القوائم کھینچا گیا ہے اور یہ خطوط منحنی سے نقطوں ف اور
ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ خط ف ق محور کو ایک ثابت نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

۱۸ — اگر دائرہ لا^2 + ما^2 + ا لا + ب ما + ج = ۰، مکافی ما^2
- ۴ ا لا = ۰ کو چار نقطوں پر قطع کرے تو ان نقطوں کے معینوں کا جبری مجموعہ صفر ہوگا۔
[۱۶ ا^2 سے ضرب دو اور ۴ ا لا کی بجائے ما^2 درج کرو۔ تب معین
مساوات

ما^4 + ۱۶ ا^2 ما^2 + ۴ ا ا ما^2 + ۱۶ ا^2 ب ما + ۱۶ ا^2 ج = ۰

سے حاصل ہوں گے۔ ان چار معینوں کا مجموعہ صفر ہے کیونکہ مساوات میں ما^3
کی رقم نہیں ہے]

۱۹ — اگر مکافی ما^2 - ۴ ا لا = ۰ کا مماس محور سے ت پر اور ا پر کے

مماس سے مما پر ملے اور مستطیل ت ا ما ق کی تکمیل کیجائے تو ثابت کرو کہ ق کا طریق مکافی ما^2 + ۲ا لا = ۰ ہے۔

۲۰ — اگر ایک مکافی پر تین نقطے ف، ق، ر ایسے ہوں جن کے محدد سلسلہ ہندسیہ میں ہیں تو ثابت کرو کہ ف، ر پر کے مماس، ق کے معین پر ملیں گے۔

۲۱ — ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جو مکافی ما^2 − ۴ا لا = ۰ میں بنایا گیا ہو

$$\frac{1}{8\text{ا}}$$ (ما۱ − ما۲) (ما۲ − ما۳) (ما۳ − ما۱)

ہے جہاں ما۱، ما۲، ما۳ راسوں کے معین ہیں۔

۹۹ — کسی نقطہ سے ایک مکافی پر دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں جو حقیقی، منطبق، یا خیالی ہونگے بموجب اس کے کہ نقطہ مکافی کے باہر، اِس کے اوپر، یا اِس کے اندر رہو۔

وہ خط جس کی مساوات

ما = م لا + $\frac{\text{ا}}{\text{م}}$ ، ....(۱)

ہے مکافی ما^2 = ۴ا لا کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ بھی ہو (دفعہ ۹۴)۔

خط (۱) مخصوص نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرے گا اگر (۱۲۰)

ماَ = م لاَ + $\frac{\text{ا}}{\text{م}}$

یعنے اگر م^2 لاَ − م ماَ + ا = ۰ ، ....(۲)

مساوات (۲) ایک دو درجی مساوات ہے اور اِس سے مکافی کے اُن مماسوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرتے ہیں۔ لیکن چونکہ کسی دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں اس لیے

کسی نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے دو مماس گذریں گے۔
(۲) کی اصلیں حقیقی، منطبق، یا خیالی ہوں گی بموجب اس کے کہ ماَ^۲ - ۴ ا لاَ مثبت، صفر، یا منفی ہو۔ یعنے [دفعہ ۹۲)] بموجب اسکے کہ (لاَ، ماَ)، مکافی کے باہر، مکافی کے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔

۱۰۰ — اُس خط کی مساوات معلوم کرنا جو اُن دو مماسوں کے نقاطِ تماس میں سے گذرے جو کسی نقطہ سے ایک مکافی پر کھینچے جا سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ (لاَ، ماَ) اُس نقطہ کے محدد ہیں جس سے مماس کھینچے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ مماسوں کے نقاطِ تماس کے محدد (ھ، ک) اور (ھَ، کَ) ہیں۔
(ھ، ک) اور (ھَ، کَ) پر کے مماسوں کی مساواتیں

ماک = ۲ ا (لا + ھ)،
ماکَ = ۲ ا (لا + ھَ)

ہیں۔
ہم جانتے ہیں کہ (لاَ، ماَ) اِن دو خطوں پر ہے۔

∴ ماَک = ۲ ا (لاَ + ھ)، .... (۱)
ماَکَ = ۲ ا (لاَ + ھَ)، .... (۲)

لیکن مساواتیں (۱) اور (۲) وہ شرطیں ہیں کہ نقاط (ھ، ک) اور (ھَ، کَ) اُس خطِ مستقیم پر واقع ہوں جس کی مساوات

ماَما = ۲ ا (لاَ + لا)، .... (۳)

ہے۔
پس (۳) اُس خط کی مطلوبہ مساوات ہے جو نقطہ (لاَ، ماَ) سے کھینچے ہوئے مماسوں کے نقاطِ تماس میں سے گذرتا ہے۔

اگر کسی نقطہ ن سے ایک مکافی کے مماس کھینچے جائیں تو اِن کے نقاطِ تماس کو ملانے والے خط کو ہم مکافی کے لحاظ سے نقطہ ن کا قطبی کہینگے۔
[دفعہ ۷۶ دیکھو]۔

(۱۲۱) **۱۰۱ — اگر ایک مکافی کے لحاظ سے نقطہ ف کا قطبی، نقطہ ق میں سے گذرے تو نقطہ ق کا قطبی، ف میں سے گذرے گا۔**

فرض کرو کہ ف کے محدد (لاً، ماً) ہیں اور ق کے (لاً، ماً)۔
مکافی ما۲ - ۴ الا = ۰ کے لحاظ سے نقطہ ف کے قطبی کی مساوات

$$\text{ما ماً} = ۲\text{ا} (\text{لا} + \text{لاً})$$

ہے۔ اگر یہ خط نقطہ (لاً، ماً) میں سے گذرتا ہے تو حاصل ہونا چاہیے

$$\text{ماً ماً} = ۲\text{ا} (\text{لاً} + \text{لاً})$$

اس نتیجہ کے تشاکل سے ظاہر ہے کہ یہ وہ شرط بھی ہے کہ ق کا قطبی ف میں سے گذرے۔

ٹھیک اسی طریقہ پر جو دفعہ ۸۰ میں اختیار کیا گیا ہے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر دو نقطوں ف اور ق کے قطبی نقطہ ر پر ملیں تو ر، خط ف ق کا قطب ہوگا۔

ماسکہ (ا، ۰) کا قطبی لا + ا = ۰ ہے اور اِس لیے ماسکہ کا قطبی مرتب ہے۔

اگر مرتب پر کوئی نقطہ ق ہو تو ق، ماسکہ س کے قطبی پر ہوگا اور اس لیے ق کا قطبی، س میں سے گذرے گا۔ پس مرتب پر کے کسی نقطہ سے ایک مکافی کے مماس کھینچے جائیں تو نقاطِ تماس کو ملانے والا خط ماسکہ میں سے گذرے گا۔

۱۰۲ — مکافی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہوتا ہے جو مکافی کے محور کے متوازی ہوتا ہے۔

مکافی $\text{ما}^۲ - ۴\,\text{ا}\,\text{لا} = ۰$ پر کے دو نقطوں ($\text{لا}_۱$، $\text{ما}_۱$) اور ($\text{لا}_۲$، $\text{ما}_۲$) کو ملانیوالے خط کی مساوات [دفعہ ۹۵ (۳)]

$$\text{ما}\,(\text{ما}_۱ + \text{ما}_۲) - ۴\,\text{ا}\,\text{لا} - \text{ما}_۱\,\text{ما}_۲ = ۰، \quad \ldots\ldots (۱)$$

ہے - اب اگر خط (۱) مکافی کے محور کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو

$$\text{مس طہ} = \frac{۴\,\text{ا}}{\text{ما}_۱ + \text{ما}_۲}، \quad \ldots\ldots (۲)$$

لیکن اگر اِس وتر کے وسطی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہوں تو

$$۲\,\text{لا} = \text{لا}_۱ + \text{لا}_۲،\quad ۲\,\text{ما} = \text{ما}_۱ + \text{ما}_۲$$

(۱۲۲) اس لیے (۲) سے $\text{مس طہ} = \frac{۴\,\text{ا}}{۲\,\text{ما}}$

یا

$$\text{ما} = ۲\,\text{ا}\,\text{حم طہ}، \quad \ldots\ldots (۳)$$

اِس لیے ما مستقل ہے تاآنکہ طہ مستقل ہو -

پس مکافی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا طریق، مکافی کے محور کے متوازی ایک خطِ مستقیم ہے -

دوسرا ثبوت: خط $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ج}$، مکافی $\text{ما}^۲ = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں $۴\,\text{ا}\,\text{ما} = \text{م}\,\text{ما}^۲ + ۴\,\text{ا}\,\text{ج}$ اس لیے اگر وتر کے نقطہ وسطی کا مُعین ما ہو تو ج کی تمام قیمتوں کے لیے $\text{ما} = \frac{۲\,\text{ا}}{\text{م}}$

تعریف - کسی مخروطی کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں کے طریق کو مخروطی کا قطر کہتے ہیں اور قطر جن وتروں کی تنصیف کرتا ہے اُن کو قطر کے معین کہتے ہیں -

ہم دفعہ ۹۳ میں دیکھ چکے ہیں کہ مکافی کا کوئی قطر، اس سے صرف ایک

نقطہ پر ملتا ہے جن کا فاصلہ راس سے محدود ہوتا ہے - وہ نقطہ جہاں قطر منحنی کو قطع کرتا ہے قطر کا سرا کہلاتا ہے -

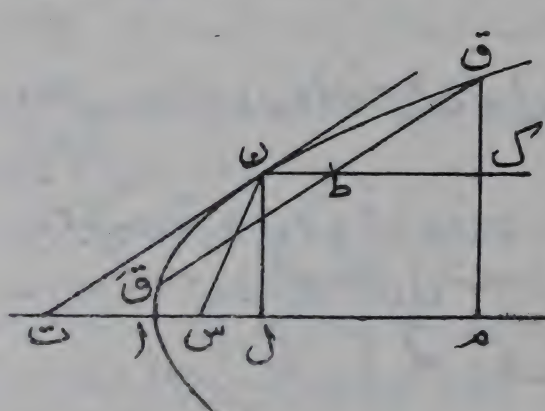
۱۰۳ - ایک قطر کے سرے پر کا مماس اُن وتروں کے متوازی ہوتا ہے جنکی وہ تنصیف کرتا ہے -

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ مکافی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطے سب کے سب ایک قطر پر واقع ہوتے ہیں - پس متوازی مماس یعنے اُس متوازی وتر پر غور کرنے سے جو منحنی کو منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ متوازی وتروں کے نظام کا قطر اُس مماس کے نقطۂ تماس میں سے گذرتا ہے جو وتروں کے متوازی ہے -

۱۰۴ - مکافی کی مساوات معلوم کرنا جبکہ کسی قطر اور اس کے سرے پر کے مماس کو محور قرار دیا جائے -

فرض کرو کہ قطر کا سرا ن ہے اور فرض کرو کہ ن پر کا مماس محور کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے - تب

ل ن = ۲ ا م طہ [دفعہ ۱۰۲ (۳)]



∴ ال = ن ل^۲ / ۴ ا = ا مم^۲ طہ

فرض کرو کہ نئے محوروں کے حوالے سے ق کے محدد (لا، ما) ہیں۔ ق مر کو مکافی کے محور پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ وہ قطر ن ط کو ک پر قطع کرتا ہے۔

تب مر ق = ل ن + ک ق = ۲ ا مم طہ + ما جب طہ، . . . (۱)

ا مر = ا ل + ل مر = ا ل + ن ط + ط ک

= ا مم^۲ طہ + لا + ما جم طہ، . . . . (۲)

لیکن ق مر^۲ = ۴ ا × ا مر

اس لیے (۱) اور (۲) سے

(۲ ا مم طہ + ما جب طہ)^۲ = ۴ ا (ا مم^۲ طہ + لا + ما جم طہ)

یا ما^۲ جب^۲ طہ = ۴ ا لا، . . . . (۳)

لیکن ال = ا مم^۲ طہ، اسلیے س ن = ا + ال = ا / جب^۲ طہ

اس لیے س ن کی بجائے اَ یا ا / جب^۲ طہ رکھنے سے منحنی کی مساوات

ما^۲ = ۴ اَ لا، . . . . (۴)

ہے —

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ محوروں کو خواہ کسی طرح تبدیل کیا جائے مساوات ما^۲ - ۴ ا لا = ۰ کی شکل

(ل لا + م ما + ن)^۲ + لَ لا + مَ ما + نَ = ۰

ہو گی (دیکھو تیسرا باب) اور اس لیے کسی مکافی کی مساوات میں جو خواہ کسی محوروں کے حوالے سے ہو دوسرے درجہ کی رقمیں ایک کامل مربع بناتی ہیں —

اِس کے بالعکس شکل

(ل لا + م ما + ن)^2 + (لَ لا + مَ ما + نَ) = ۰

کی کوئی مساوات جس میں دو سرے درجہ کی رقمیں ایک کامل مربع بناتی ہیں ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے - نیز ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی کے کسی نقطہ سے خط ل لا + م ما + ن = ۰ پر کا عمود ایسے بدلتا ہے جیسے وہ عمود جو اُسی نقطہ سے لَ لا + مَ ما + نَ = ۰ پر کھینچا گیا ہو اور اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر اِن خطوں کو لا اور ما کے نئے محور قرار دیا جائے تو منحنی کی مساوات کی شکل ما^2 = ۴ ا لا ہو جاتی ہے -

اِس طرح مساوات (ل لا + م ما + ن)^2 + لَ لا + مَ ما + ن = ۰ ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ایک قطر ل لا + م ما + ن = ۰ ہے اور اِس کے سِرے پر کا مماس لَ لا + مَ ما + نَ = ۰ ہے -

۱۰۵ — اگر ایک مکافی کی مساوات کسی قطر اور اُس مماس کے حوالے سے جو قطر کے سِرے پر کھینچا گیا ہو ما^2 = ۴ ا لا ہو تو خط ما = م لا + $\frac{ا}{م}$، م کی تمام قیمتوں کے لیے اس کا ایک مماس ہو گا، کسی نقطہ (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات ما ماَ - ۲ ا (لا + لاَ) = ۰ ہو گی، مکافی کے لحاظ سے نقطہ (لاَ، ماَ) کے قطبی کی مساوات ما ماَ - ۲ ا (لا + لاَ) = ۰ ہو گی، اور خط ما = م لا کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ما = $\frac{۲ا}{م}$ ہو گا -

اِن مسئلوں کے لیے نئی تحقیق کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ دفعات ۹۴، ۹۵، ۱۰۰، اور ۱۰۲ برابر درست رہتے ہیں خواہ محاور علی القوائم ہوں یا نہ ہوں -

(۱) مکافی کے دو مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرنا جبکہ مماس ایک دوسرے کے ساتھ ایک دیا ہوا زاویہ بنائیں۔

خط $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{م}}$ ، مکافی $\text{ما}^{2} - ۴\,\text{ا}\,\text{لا} = ۰$ کا مماس ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو [دفعہ ۴۹]۔

اگر (لا، ما) کو معلومہ فرض کیا جائے تو اس مساوات سے اُن مماسوں کی سمتیں معلوم ہونگی جو اِس نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔ چنانچہ سمتوں کو معلوم کرنیکے لیے مساوات ہوگی

$$\text{م}^{2}\,\text{لا} - \text{م}\,\text{ما} + \text{ا} = ۰$$

اور اگر اِس دو درجی مساوات کی اصلیں م_{1} اور م_{2} ہوں تو

$$\text{م}_{1} + \text{م}_{2} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} \quad \text{اور} \quad \text{م}_{1}\,\text{م}_{2} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}}$$

$$\therefore \quad (\text{م}_{1} - \text{م}_{2})^{2} = \frac{\text{ما}^{2} - ۴\,\text{ا}\,\text{لا}}{\text{لا}^{2}}$$

لیکن اگر دو مماس ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ عہ بنائیں تو

$$\text{مس}\,\text{عہ} = \frac{\text{م}_{1} - \text{م}_{2}}{۱ + \text{م}_{1}\,\text{م}_{2}}$$

$$\therefore \quad \text{مس}^{2}\,\text{عہ} = \frac{\text{ما}^{2} - ۴\,\text{ا}\,\text{لا}}{(\text{ا} + \text{لا})^{2}}$$

اس لیے مطلوبہ طریق کی مساوات

$$\text{ما}^{2} - ۴\,\text{ا}\,\text{لا} - (\text{لا} + \text{ا})^{2}\,\text{مس}^{2}\,\text{عہ} = ۰$$

ہے۔

(۲) اُس عمود کے پائین کا طریق معلوم کرنا جو ایک ثابت نقطہ سے مکافی کے کسی مماس پر کھینچا گیا ہو۔

فرض کرو کہ مکافی کی مساوات $\text{ما}^{2} - ۴\,\text{ا}\,\text{لا} = ۰$ ہے اور ثابت نقطہ و کے

محدد (ھ، ک) ہیں۔

مکافی کے کسی مماس کی مساوات

ما = م لا + ا/م ، ....(۱)

ہے۔ اُس خط کی مساوات جو (ھ، ک) میں سے گذرتا ہے اور خط (۱) پر عمود ہے

ما - ک = - ۱/م (لا - ھ)، ....(۲)

ہے۔

طریق کو معلوم کرنے کے لیے م کو مساواتوں (۱) اور (۲) سے ساقط کرنا ہوگا۔ چنانچہ (۲) کی رو سے

م = - (لا - ھ)/(ما - ک)

اور اس لیے (۱) میں درج کرنے سے

ما + (لا - ھ)/(ما - ک) لا + ا (ما - ک)/(لا - ھ) = ۰

یا ما (ما - ک)(لا - ھ) + لا (لا - ھ)^۲ + ا (ما - ک)^۲ = ۰، ....(۳)

اس لیے طریق تیسرے درجہ کا ایک منحنی ہے۔

(۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطہ و خود ہمیشہ طریق پر رہتا ہے۔ اگر نقطہ و مکافی کے باہر ہو تو اس سے کوئی اشکال پیدا نہیں ہوتی کیونکہ ایسی صورت میں و میں سے دو حقیقی مماس کھینچے جا سکتے ہیں اور و سے اِن مماسوں پر عمود کھینچے جائیں تو ان کا پائین خود نقطہ و ہوگا۔ جب نقطہ و مکافی کے اندر ہوتا ہے تو و سے کھینچے ہوئے مماس خیالی ہوتے ہیں اور اس لیے و سے اِن پر کھینچے ہوئے عمود بھی خیالی ہوتے ہیں لیکن وہ سب نقطہ و میں سے گذرتے ہیں اور اس لیے و، طریق پر ایک نقطہ ہے۔

اگر ھ = ا تو ک = ۰ یعنے جب و مکافی کے ماسکہ پر ہوتا ہے تو

(۱۲۶) مساوات (۳) تحویل ہو کر $\text{لا}\{\text{ما}^2+(\text{لا}-\text{ا})^2\}=0$ ہو جاتی ہے اور اس لیے کبھی
نقطہ دائرہ $\text{ما}^2+(\text{لا}-\text{ا})^2=0$ اور خطِ مستقیم $\text{لا}=0$ میں تحویل ہوتا ہے۔

(۳) اُس مثلث کا مرکز عمودی جو مکافی کے تین مماسوں سے بنے مرتب پر ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مثلث کے اضلاع کی مساواتیں

$$\text{ما}=\text{م}'\,\text{لا}+\frac{\text{ا}}{\text{م}'}\text{ ، }\quad \text{ما}=\text{م}''\,\text{لا}+\frac{\text{ا}}{\text{م}''}\text{ ، }\quad \text{ما}=\text{م}'''\,\text{لا}+\frac{\text{ا}}{\text{م}'''}$$

ہیں دوسرے اور تیسرے اضلاع کا نقطہ تقاطع

$$\left(\frac{\text{ا}}{\text{م}''\,\text{م}'''}\text{ ، }\ \frac{\text{ا}}{\text{م}''}+\frac{\text{ا}}{\text{م}'''}\right)$$

ہے۔ اُس خط کی مساوات جو اِس نقطہ میں سے گذرتا ہے اور پہلے ضلع پر عمود ہے

$$\text{ما}-\frac{\text{ا}}{\text{م}''}-\frac{\text{ا}}{\text{م}'''}=-\frac{1}{\text{م}'}\left(\text{لا}-\frac{\text{ا}}{\text{م}''\,\text{م}'''}\right)$$

ہے۔ اب یہ خط مرتب $\text{لا}=-\text{ا}$ کو اُس نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کا معین

$$\text{ا}\left(\frac{1}{\text{م}'}+\frac{1}{\text{م}''}+\frac{1}{\text{م}'''}+\frac{1}{\text{م}'\,\text{م}''\,\text{م}'''}\right)$$

ہے۔ اِس نتیجہ کے تشاکل سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دوسرے عمود بھی مرتب کو اُسی نقطہ پر قطع کرتے ہیں جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

(۴) دو مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرنا جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

وہ خط جس کی مساوات

$$\text{ما}=\text{م}\,\text{لا}-2\,\text{ا}\,\text{م}-\text{ا}\,\text{م}^3\text{ ، } \qquad \ldots\ldots\ (1)$$

ہے مکافی $ما^2 - ۴ ا لا = $، کا ایک عماد ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔
اگر نقطہ (لا، ما) کو معلومہ فرض کیا جائے تو مساوات (۱) سے اُن عمادوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو اس نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔
اگر (۱) کی اصلیں $م_۱$، $م_۲$، $م_۳$ ہوں تو

$$م_۱ م_۲ م_۳ = - \frac{ما}{ا} ، \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

لیکن اگر عمادوں میں سے دو (فرض کرو وہ جو $م_۱$، $م_۲$ سے حاصل ہوتے ہیں) علی القوائم ہوں تو

$$م_۱ م_۲ = -۱ ، \text{ اور اس لیے (۲) سے } م_۳ = \frac{ما}{ا}$$

لیکن $م_۳$، (۱) کی ایک اصل ہے

$$\therefore \quad ما = \frac{لا ما}{ا} - ۲ ما - \frac{ما^۳}{ا^۲}$$

اس طرح $ما^2 = ا (لا - ۳ ا)$، مطلوبہ طریق کی مساوات ہے۔

۱۰۶ – "ہم عماد" نقطے۔ مکافی $ما^2 - ۴ ا لا = ۰$ کے کسی نقطہ ($لاَ$، $ماَ$) پر کے عماد کی مساوات

$$۲ ا (ما - ماَ) + ماَ (لا - لاَ) = ۰ ، \quad \ldots\ldots (۱)$$

ہے۔ اگر خط (۱)، نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرے تو

$$۸ ا^۲ (ک - ماَ) + ماَ (۴ ا ھ - ماَ^۲) = ۰ ، \quad \ldots (۲)$$

مساوات (۲) سے اُن نقطوں کے مُعیّن حاصل ہوتے ہیں جن پر کے عماد مخصوص نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرتے ہیں۔ یہ مساوات ایک کعبی مساوات ہے اور اس لیے کسی نقطہ میں سے مکافی کے تین عماد (جن میں سے کم از کم ایک حقیقی ہونا چاہیے) کھینچے جا سکتے ہیں۔
چونکہ مساوات (۲) میں $ماَ^2$ کی کوئی رقم شامل نہیں ہے اس لیے

اگر اس کی اصلیں $ما_۱$، $ما_۲$، $ما_۳$ ہوں تو

$$ما_۱ + ما_۲ + ما_۳ = ۰ \quad \ldots\ldots (۳)$$

اب ہم جانتے ہیں کہ مکافی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے لیے ان میں سے کسی وتر کے سروں پر کے دو معینوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ [دفعہ ۱۰۲]۔ اس لیے ان نقطوں پر کے عماد ایک ثابت نقطہ کے عماد پر ملتے ہیں جس کے معین کو عمادوں کے معینوں کے مجموعہ میں جمع کرنے پر صفر حاصل ہوتا ہے۔

پس اُن عمادوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق جو ایک مکافی کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے سروں پر کھینچے گئے ہوں ایک خطِ مستقیم ہے جو منحنی کا ایک عماد ہے۔

اگر ف، ق، ر پر کے عماد (ھ، ک) پر ملیں تو ف، ق، ر کے معین مساوات

$$ما^۳ + ۴ا(۲ا - ھ)ما - ۸ا^۲ک = ۰ \quad \ldots\ldots (۴)$$

کی اصلیں ہیں۔

اب فرض کرو کہ دائرہ ف ق ر

$$لا^۲ + ما^۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰$$

ہے۔ $۱۶ا^۲$ سے ضرب دو اور $۴ا لا$ کی بجائے $ما^۲$ رکھو تو دائرہ اور مکافی کے نقاطِ تقاطع کے معین مساوات

$$ما^۴ + ۱۶ا^۲ما^۲ + ۸اگ ما^۲ + ۳۲ا^۲ف ما + ۱۶ا^۲ج = ۰ \quad \ldots (۵)$$

کی اصلیں ہیں۔

پس $ما_۱ + ما_۲ + ما_۳ + ما_۴ = ۰$۔ لیکن (۴) سے ہم دیکھتے ہیں کہ نقطوں ف، ق، ر کے لیے $ما_۱ + ما_۲ + ما_۳ = ۰$۔

اس لیے $ما_۴ = ۰$ اور اس لیے دائرہ ف ق ر (ھ، ک) کی تمام

قیمتوں کے لیے مکافی کے راس میں سے گذرتا ہے۔

پس ج = ۰ اور پھر (۴) سے ف، ق، ما کے معین، مساوات (۸

ما^{۳} + ۸ ا (گ + ۲ ا) ما + ۳۲ ا^{۲} ف = ۰، ..... (۶)

کی اصلیں ہیں۔

(۴) اور (۶) کا مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

۲ گ = − (ھ + ۲ ا) اور ۴ ف = − ک

اس طرح وہ دائرہ جو اُن تین نقطوں میں سے گذرتا ہے جن پر کے عماد نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرتے ہیں

لا^{۲} + ما^{۲} − (ھ + ۲ ا) لا − $\frac{۱}{۲}$ ک ما = ۰

ہے۔

۱۰۷ — مکافی ما^{۲} − ۴ ا لا = ۰ پر کے کسی نقطہ کے دونوں محددوں کو ایک متغیر کی رقوم میں بیان کرنا اکثر مفید ہوتا ہے۔

سادہ ترین طریقہ لا کو ما کی رقوم میں بیان کرنے کا ہے۔

نقطہ ($\frac{ما_{۱}^{۲}}{۴ ا}$، ما$_{۱}$) صریحاً ما^{۲} − ۴ ا لا = ۰ پر ہے اور اگر اس کو نقطہ ما$_{۱}$ کہا جائے تو ہم نے حسب ذیل مساواتیں علی الترتیب (۱) وتر ما$_{۱}$، ما$_{۲}$ کے لیے، (۲) ما$_{۱}$ پر کے مماس کے لیے، اور (۳) ما$_{۱}$ اور ما$_{۲}$ پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کے لیے معلوم کی ہیں:

(۱) ما (ما$_{۱}$ + ما$_{۲}$) − ۴ ا لا − ما$_{۱}$ ما$_{۲}$ = ۰،

(۲) ۲ ما ما$_{۱}$ − ۴ ا لا − ما$_{۱}^{۲}$ = ۰،

(۳) ۴ ا لا = ما$_{۱}$ ما$_{۲}$ اور ۲ ما = ما$_{۱}$ + ما$_{۲}$

دوسرا طریقہ جو اکثر استعمال کیا جاتا ہے لا = ا ع^{۲} اور ما = ۲ ا ع رکھنے کا ہے۔

نقطہ (ا ع^{۲}، ۲ ا ع) صریحاً ما^{۲} − ۴ ا لا = ۰ پر ہے اور اگر اسے کو نقطہ ع کہا جائے تو ہم وتر ع$_{۱}$ ع$_{۲}$ وغیرہ کی مساواتیں دفعہ ۹۵ وغیرہ کے

طریقہ پر معلوم کر سکتے ہیں (یا اوپر کی مساواتوں میں ما_1 کی بجائے $2\,\text{ا}\,\text{ع}_1$ درج کر کے)۔ چنانچہ یہ مساواتیں

$$(1)\quad \text{ما}\,(\text{ع}_1+\text{ع}_2) - 2\,\text{لا} - 2\,\text{ا}\,\text{ع}_1\text{ع}_2 = 0,$$

$$(2)\quad \text{ما}\,\text{ع}_1 - \text{لا} - \text{ا}\,\text{ع}_1^2 = 0,$$

$$(3)\quad \text{لا} = \text{ا}\,\text{ع}_1\text{ع}_2,\ \text{اور}\ \text{ما} = \text{ا}\,(\text{ع}_1+\text{ع}_2)$$

ہیں۔

مثال ۱ — اگر ایک دائرہ کا قطر ایک مکافی کا ایسا وتر ہو جس کے سروں کے معینوں کا فرق وتر خاص کے طول کا دگنا ہے تو ثابت کرو کہ دائرہ مکافی کو مس کرے گا۔

فرض کرو کہ وتر کے سرے ما_1، ما_2 ہیں تو $\text{ما}_1 - \text{ما}_2 = 8\,\text{ا}$ ۔

دائرہ کی مساوات [دفعہ ۶۶ مثال ۲] (۱۲

$$(\text{ما}-\text{ما}_1)(\text{ما}-\text{ما}_2) + (\text{لا}-\text{لا}_1)(\text{لا}-\text{لا}_2) = 0$$

ہے۔ یہ دائرہ مکافی کو اُن نقطوں پر قطع کرتا ہے جن کے معین

$$16\,\text{ا}^2(\text{ما}-\text{ما}_1)(\text{ما}-\text{ما}_2) + (\text{ما}^2-\text{ما}_1^2)(\text{ما}^2-\text{ما}_2^2) = 0$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس طرح دوسرے دو نقاط تقاطع کے معین مساوات

$$16\,\text{ا}^2 + (\text{ما}+\text{ما}_1)(\text{ما}+\text{ما}_2) = 0$$

یعنے

$$\text{ما}^2 + \text{ما}\,(\text{ما}_1+\text{ما}_2) + \text{ما}_1\text{ما}_2 + 16\,\text{ا}^2 = 0$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اس آخری مساوات کی اصلیں مساوی ہونگی اگر

$$(\text{ما}_1+\text{ما}_2)^2 = 4\,\text{ما}_1\text{ما}_2 + 64\,\text{ا}^2$$

یعنے اگر

$$(\text{ما}_1-\text{ما}_2)^2 = (8\,\text{ا})^2$$

مثال ۲ — مکافیوں $\text{ما}^2 - 4\,\text{ا}\,\text{لا} = 0$ اور $\text{لا}^2 - 4\,\text{ب}\,\text{ما} = 0$ میں سے

کسی ایک میں مثلثوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جا سکتی ہے جن کے ضلع دوسرے مکافی کو مس کریں۔

فرض کرو کہ ما^2 - ۴ ا لا = ۰ پر کوئی تین نقطے ما$_1$، ما$_2$، ما$_3$ ہیں ایسے کہ خطوط ما$_1$ ما$_2$ اور ما$_1$ ما$_3$ میں سے ہر ایک مکافی لا^2 - ۴ ب ما = ۰ کو مس کر سکے۔ تب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ خط ما$_2$ ما$_3$ بھی اس مکافی کو مس کرتا ہے۔

ما$_1$، ما$_2$ کو ملانے والا خط

ما (ما$_1$ + ما$_2$) - ۴ ا لا - ما$_1$ ما$_2$ = ۰

ہے۔ یہ خط دوسرے مکافی کو مس کرتا ہے اور اس لیے مساوات

(ما$_1$ + ما$_2$) لا^2 - ۱۶ ا ب لا - ۴ ب ما$_1$ ما$_2$ = ۰

کی اصلیں مساوی ہیں اور اس لیے

ما$_1$ ما$_2$ (ما$_1$ + ما$_2$) + ۱۶ ا^2 ب = ۰، ...... (۱)

نیز ما$_1$ ما$_3$ (ما$_1$ + ما$_3$) + ۱۶ ا^2 ب = ۰، ...... (۲)

تفریق کرنے اور ما$_1$ (ما$_2$ - ما$_3$) سے تقسیم کرنے پر جہاں ما$_1$ (ما$_2$ - ما$_3$) صفر نہیں ہے حاصل ہوتا ہے

ما$_1$ + ما$_2$ + ما$_3$ = ۰، ...... (۳)

ما$_1$ کو (۱) اور (۳) سے ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے

ما$_2$ ما$_3$ (ما$_2$ + ما$_3$) + ۱۶ ا^2 ب = ۰

جس سے ثابت ہے کہ ما$_2$، ما$_3$ کو ملانے والا خط بھی لا^2 = ۴ ب ما کو مس کرتا ہے۔

مثال ۳۔ مکافی ما^2 - ۴ ا لا = ۰ میں کھینچے ہوئے متساوی الاضلاع مثلثوں کے مرکزوں کا طریق مکافی ۹ ما^2 - ۴ ا لا + ۳۲ ا^2 = ۰ ہے۔

متساوی الاضلاع مثلث میں مرکزِ ہندسی مرکزِ عمودی پر منطبق ہوتا ہے۔ اب اس مثلث کا مرکزِ ہندسی جس کے راس نقطے ع$_1$، ع$_2$، ع$_3$ ہیں

۳ لا = ا ∑ ع$_{1}^{2}$ = ا (∑ ع$_1$)^2 − ۲ ا ∑ ع$_1$ ع$_2$ ،

اور　　۳ ما = ۲ ا ∑ ع$_1$

سے معلوم ہوتا ہے۔

مثلث کے عمودوں میں سے دو، مساواتوں

۲ (ما − ۲ ا ع$_1$) + (ع$_2$ + ع$_3$) (لا − ا ع$_{1}^{2}$) = ۰ ،

۲ (ما − ۲ ا ع$_2$) + (ع$_3$ + ع$_1$) (لا − ا ع$_{2}^{2}$) = ۰

سے معلوم ہوتے ہیں۔

تفریق کرنے پر (۱۳۰

۴ ا + لا + ا ∑ ع$_1$ ع$_2$ ع$_3$ = ۰

پس چونکہ مرکزِ ہندسی اور مرکزِ عمودی منطبق ہوتے ہیں اس لیے

۳ لا = ا (∑ ع$_1$)^2 + ۸ ا + ۲ لا ،

۴ ا لا − ۳۲ ا^2 = ۴ ا^2 (∑ ع$_1$)^2 = ۹ ما^2

مثال ۴ — ایک مثلث کے اضلاع ما^2 − ۴ ا لا = ۰ کو مس کرتے ہیں اور اس کے دو راس ما^2 − ۴ ب (لا + ج) = ۰ پر ہیں۔ تیسرے راس کا طریق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ تین مماس

ما ع$_1$ − لا − ا ع$_{1}^{2}$ = ۰ ، . . . . (۱)

ما ع$_2$ − لا − ا ع$_{2}^{2}$ = ۰ ، . . . . (۲)

اور　ما ع$_3$ − لا − ا ع$_{3}^{2}$ = ۰ ، . . . . (۳)

ہیں۔ تب مثلث کے تین راس

$$\{\text{ا}ع_{۲}ع_{۳}،\ \text{ا}(ع_{۲}+ع_{۳})\}\ \left[\text{ا}ع_{۳}ع_{۱}،\ \text{ا}(ع_{۳}+ع_{۱})\right]\ \{\text{ا}ع_{۱}ع_{۲}،\ \text{ا}(ع_{۱}+ع_{۲})\}$$

ہیں۔

فرض کرو کہ آخری دو راس دوسرے مکافی پر ہیں، تب

$$\text{ا}^{۲}(ع_{۳}+ع_{۱})^{۲}-۴\text{ب}\,\text{ا}ع_{۳}ع_{۱}-۴\text{ب}\text{ج}=۰$$

اور
$$\text{ا}^{۲}(ع_{۱}+ع_{۲})^{۲}-۴\text{ب}\,\text{ا}ع_{۱}ع_{۲}-۴\text{ب}\text{ج}=۰$$

اس لیے
$$\text{ا}(ع_{۲}+ع_{۳})=(۴\text{ب}-۲\text{ا})ع_{۱}$$

اور
$$\text{ا}^{۲}ع_{۲}ع_{۳}=\text{ا}^{۲}ع_{۱}^{۲}-۴\text{ب}\text{ج}$$

$$=\frac{\text{ا}^{۴}}{۴(۲\text{ب}-\text{ا})^{۲}}(ع_{۲}+ع_{۳})^{۲}-۴\text{ب}\text{ج}$$

لیکن تیسرے راس کے لیے $\text{لا}=\text{ا}ع_{۲}ع_{۳}$ اور $\text{ما}=\text{ا}(ع_{۲}+ع_{۳})$۔
اس لیے مطلوبہ طریق مکافی

$$\text{ا}\,\text{لا}=\frac{\text{ا}^{۲}}{۴(۲\text{ب}-\text{ا})^{۲}}\text{ما}^{۲}-۴\text{ب}\text{ج}$$

یا
$$\text{ما}^{۲}=۴\left(\frac{۲\text{ب}}{\text{ا}}-۱\right)^{۲}(\text{ا}\,\text{لا}+۴\text{ب}\text{ج})$$

ہے جو خود دوسرا مکافی ہے اگر $\text{ا}=۴\text{ب}$۔

لفاف

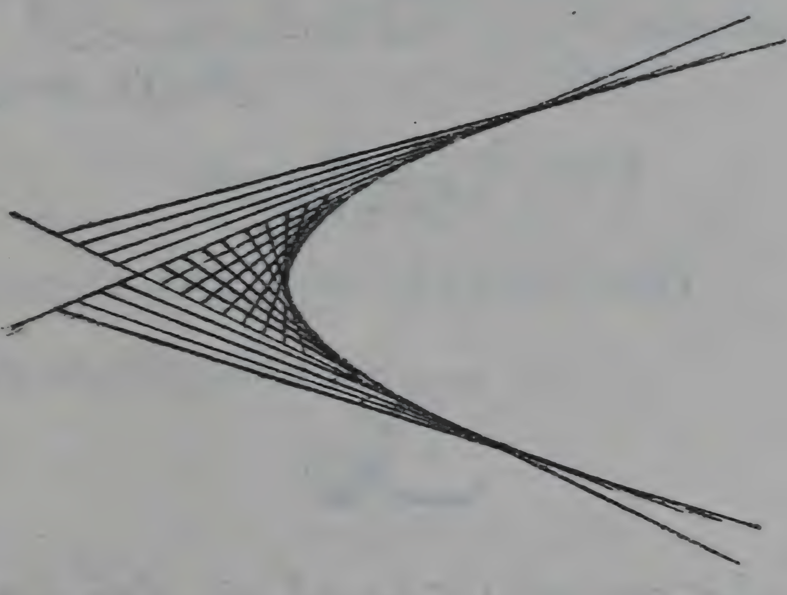
۱۰۸۔ اگر ایک نقطہ کے محددوں میں کوئی جبری رشتہ ہو تو وہ ہر طرح حرکت کرنے میں آزاد نہیں ہو گا لیکن وہ ایک خاص منحنی پر کوئی محل اختیار

کرسکتا ہے۔ اِس منحنی کو متحرک نقطہ کا **طریق** کہتے ہیں۔

اسی طرح اگر ایک خطِ مستقیم کی مساوات کے دو مستقلوں میں کوئی
(۱۳۱) رشتہ ہو تو خط ہر طرح حرکت کرنے میں آزاد نہیں ہوگا لیکن وہ ایسے لاتعداد محل اختیار کرسکتا ہے جو سب کے سب ایک خاص منحنی کے مماس ہونگے۔ اِس منحنی کو متحرک خط کا **لفاف** کہتے ہیں۔

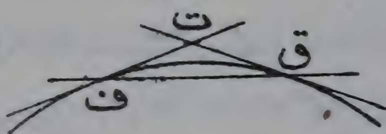
مثلاً اگر مساوات ل لا + م ما - ا = ۰ کے مستقلوں ل اور م میں رشتہ ا^{2} ل^{2} + ا^{2} م^{2} = ۱ ہو تو خطِ مستقیم ل لا + م ما - ا = ۰ اس طرح حرکت کرے گا کہ نقطہ (۰، ۰) سے اس کا عمودی فاصلہ ہمیشہ ا کے مساوی ہوگا اور اِس لیے یہ خط اپنے تمام ممکن محلوں میں دائرہ لا^{2} + ما^{2} = ا^{2} کو مس کرنا چاہیے۔

حسب ذیل شکل میں ایک خطِ مستقیم کے مختلف محل دکھائے گئے ہیں جو محوروں پر ایسے مقطوعے قطع کرتا ہے جن کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔



اب اگر ت ف اور ت ق، کسی منحنی کے دو متصلہ مماس ہوں

اور اگر مماس ت ق بتدریج ت ف کی طرف حرکت کرکے بالآخر ت ف پر منطبق ہو جائے تو مماسوں کا نقطۂ تقاطع، نقطہ ف کے قریب اور قریب تر حرکت کرے گا اور بالآخر اُس پر آکر منطبق ہو جائیگا۔ اِس طرح دو منطبق مماسوں کا نقطۂ تقاطع اُس منحنی پر ہوتا ہے جس کو سب مماس مس کرتے ہیں۔ نیز وہ دو مماس جو کسی نقطہ سے ایک منحنی کے کھینچے جائیں منطبق ہوں گے اگر نقطہ منحنی پر ہو۔



اب خطوطِ مستقیم کے اُس نظام پر غور کرو جو مساوات

$$\frac{\text{لا}}{\text{ھ}} + \frac{\text{ما}}{\text{ل} - \text{ھ}} = ۱ \quad \text{یا} \quad \text{ھ}^2 + \text{ھ}(\text{ما} - \text{لا} - \text{ل}) + \text{ل لا} = ۰ \quad \ldots (۱)$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ل مستقل ہے۔

چونکہ (۱) دو درجی مساوات ہے اس لیے ھ کی دو قیمتیں، لا اور ما کی کسی معلومہ قیمتوں کے جواب میں حاصل ہوں گی۔ اس طرح کسی دئے ہوئے نقطہ میں سے نظام کے دو خطوطِ مستقیم کھینچے جا سکتے ہیں۔ جب یہ دو خطوط منطبق ہوتے ہیں تو نقطہ (لا، ما) کو اُس منحنی پر ہونا چاہیے جس کو تمام خطوط مس کرتے ہیں۔

پس اُس منحنی کی مساوات جس کو نظام کے تمام خطوط مس کرتے ہیں یہ شرط لکھ لینے سے حاصل ہوگی کہ دو درجی (۱) کی دو اصلیں مساوی ہوں۔ اب (۱) کی دو اصلیں مساوی ہونگی اگر

$$۴\,\text{ل لا} = (\text{ما} - \text{لا} - \text{ل})^2, \quad \ldots\ldots (۲)$$

جو [دفعہ ۱۰۴] ایک مکافی کی مساوات ہے ۔
یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہو سکتا ہے کہ مکافی (۲) محوروں کو نقطوں (ل، ۰) اور (۰، ل) پر مس کرتا ہے ۔
اس طرح وہ تمام خطوط جو صفحہ (۱۸۶) کی شکل میں کھینچے گئے ہیں ایک مکافی کو مس کرتے ہیں ۔

(۲۳۳) **مثال ۱** ـ خطِ مستقیم $\text{ما} = \text{م لا} + \frac{\text{ا}}{\text{م}}$ کا لفاف معلوم کرو ـ
مساوات کو لکھا جا سکتا ہے

$$\text{م}^2\,\text{لا} - \text{م ما} + \text{ا} = ۰، \qquad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

چونکہ (۱) دو درجی مساوات ہے اس لیے لا اور ما کی کسی معلومہ قیمتوں کے جواب میں م کی دو قیمتیں ہیں ۔ پس نظام کے دو خطوط کسی نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں ۔ جب م کی دو قیمتیں مساوی ہوتی ہیں تو خطوط منطبق ہوتے ہیں اور (لا، ما) مطلوبہ لفاف پر ہوتا ہے ـ
اب وہ شرط کہ (۱) کی دو اصلیں مساوی ہوں یہ ہے کہ

$$\text{ما}^2 - ۴\,\text{ا لا} = ۰$$

اور یہ مطلوبہ لفاف ہے ۔

مثال ۲ ـ خط ا لا جم طہ + ب ما جب طہ + ج = ۰ کا لفاف معلوم کرو ـ
اِس مساوات کو لکھا جا سکتا ہے

$$\text{ا لا}\left(\text{جم}^2\frac{\text{طہ}}{۲} - \text{جب}^2\frac{\text{طہ}}{۲}\right) + ۲\,\text{ب ما جب}\frac{\text{طہ}}{۲}\text{جم}\frac{\text{طہ}}{۲} + \text{ج}\left(\text{جم}^2\frac{\text{طہ}}{۲} + \text{جب}^2\frac{\text{طہ}}{۲}\right) = ۰$$

یا

$$\text{ا لا} + \text{ج} + ۲\,\text{ب ما ت} + (\text{ج} - \text{ا لا})\,\text{ت}^2 = ۰$$

جہاں $\text{ت} = \text{مس}\,\frac{\text{طہ}}{۲}$ ـ

اس طرح نظام کے دو خطوط کسی نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں ۔ یہ خطوط منطبق ہوں گے اگر

$$(\text{ا لا} + \text{ج})(\text{ج} - \text{ا لا}) - \text{ب}^2\,\text{ما}^2 = ۰$$

اس لیے لفاف ہے $ا^2 لا^2 + ب^2 ما^2 = ج^2$

مثال (۳) ـ خط ل لا + م ما + ۱ = ۰ کا لفاف شرط $ا ل^2 + ب م^2 + ج = ۰$ کے ساتھ معلوم کرو ـ

ل لا + م ما + ۱ = ۰ اور $ا ل^2 + ب م^2 + ج = ۰$ سے

$$ا ل^2 + ب م^2 + ج (ل لا + م ما)^2 = ۰$$

$\frac{ل}{م}$ کی دو قیمتوں سے نظام کے ان دو خطوں کی سمتیں حاصل ہوتی ہیں جو کسی نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں ـ

یہ دو خطوط منطبق ہوں گے اگر $\frac{ل}{م}$ کا مندرجہ صدر دو درجی دو مساوی اصلیں رکھے جس کے لیے یہ شرط ہے کہ

$$(ا + ج لا^2)(ب + ج ما^2) = ج^2 لا^2 ما^2$$

اس لیے مطلوبہ طریق $\frac{لا^2}{ا} + \frac{ما^2}{ب} + \frac{۱}{ج} = ۰$ ہے ـ

مثال (۴) ـ مکافی $ما^2 - ۴ ا لا = ۰$ پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن ل ہے، مکافی کا راس ا ہے اور مستطیل ا ل ن ر کی تکمیل کی گئی ہے ـ ثابت کرو کہ ر ل کا لفاف $ما^2 + ۱۶ ا لا = ۰$ ہے ـ

مثال (۵) ـ ثابت کرو کہ اگر ان مقطوعوں کا مجموعہ جو ایک متحرک خط محوروں پر قطع کرتا ہے مستقل رہے تو خط ایک مکافی کو لف کرے گا ـ

مثال (۶) ـ ایک خطِ مستقیم کا لفاف معلوم کرو جو محوروں کو علی الترتیب (۳۴)
ف، ق پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ مثلث و ف ق کا رقبہ مستقل رہتا ہے ـ

مثال ۷ ـ ایک مکافی کے ایسے وتر کا لفاف جس کے سِروں پر کے معینوں کا فرق مستقل رہے مساوی مکافی ہوتا ہے ـ

مثال ۸ ـ ایک مکافی کے وتر ن ق، ن ر معلومہ خطوطِ مستقیم کے

متوازی ہیں - ثابت کرو کہ ق سا مساوی مکافی کو لف کرتا ہے -

مثال ۹ — ایک کثیر الاضلاع کو ایک مکافی میں بنایا گیا ہے اور اس کثیر الاضلاع کے تمام اضلاع اِلّا ایک کے معلومہ خطوطِ مستقیم کے متوازی ہیں - ثابت کرو کہ اگر اضلاع کی تعداد جفت ہے تو باقی ضلع بھی ایک ثابت خطِ مستقیم کے متوازی ہوگا لیکن اگر اضلاع کی تعداد طاق ہے تو باقی ضلع ایک مکافی کو لف کرے گا -

مثال ۱۰ — اگر دو ثابت نقطوں سے ایک متحرک خط پر عمود کھینچے جائیں اور اِن عمودوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہو تو ثابت کرو کہ خط ایک مکافی کو لف کرے گا -

مثال ۱۱ — مکافی ما۲ - ۴ ا لا = ۰ کے کسی نقطہ ن پر کا عماد محور کو گ پر قطع کرتا ہے - ثابت کرو کہ وہ خط جو گ میں سے گذرتا ہے اور ن پر کے مماس کے متوازی ہے ہم ماسکی مکافی ما۲ + ۴ ا (لا - ۲ ا) = ۰ کو لف کرتا ہے -

مثال ۱۲ — ثابت کرو کہ ایک خط ف ق کا لفاف جو ایک مکافی کے کسی نقطہ ف میں سے اس طرح کھینچا گیا ہو کہ ف میں سے گذرنے والا قطر، ف ق اور ف پر کے مماس کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے دوسرا مکافی ہے

مثال ۱۳ — ایک دائرہ کے ایک وتر کا نقطہ وسطی ایک ثابت خطِ مستقیم پر ہے - ثابت کرو کہ یہ وتر ایک مکافی کو لف کرتا ہے -

مثال ۱۴ — ایک مکافی کا ایک متغیر مماس ایک ثابت مماس کو نقطہ ن پر قطع کرتا ہے - ثابت کرو کہ وہ خط جو ن میں سے گذرتا ہے اور متغیر مماس پر عمود ہے ایک مکافی کو لف کرتا ہے -

مثال ۱۵ — ایک دئے ہوئے خط پر کے کسی نقطہ ن میں سے خط ن ق اس طرح کھینچا گیا ہے کہ وہ ایک دئے ہوئے مکافی کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی کے متوازی ہے - ثابت کرو کہ ن ق کا لفاف ایک دوسرا مکافی ہے -

مثال ۱۶ — ایک دئے ہوئے خط پر کے کسی نقطہ ن میں سے خط ن ق اس طرح کھینچا گیا ہے کہ وہ ایک دئے ہوئے مکافی کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی پر

عمود ہے - ثابت کرو کہ ن ق کا لفاف ایک دوسرا مکافی ہے -

مثال ۱۷ - ایک خط کا لفاف معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اگر دو نقطوں (ا، ۰)، (-ا، ۰) سے اس خط پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ ۲ ج^2 کے مساوی ہوتا ہے -

جواب: $\frac{لا^2}{ج^2 - ا^2} + \frac{ما^2}{ج^2} = ۱$

مثال ۱۸ - ثابت کرو کہ وہ خطِ مستقیم جو دو دیے ہوئے دائروں کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ دائروں کے وتر مساوی ہیں ایک مکافی کو لف کرتا ہے -

مثال ۱۹ - و لا، و ما دو ثابت خط ہیں اور ا ایک ثابت نقطہ ہے - کوئی دائرہ جو و اور ا میں سے گذرتا ہے و لا، و ما کو علی الترتیب (۳۵
ف، ق پر قطع کرتا ہے - ثابت کرو کہ ف ق، ایک ثابت مکافی کا مماس ہے -

مثال ۲۰ - ایک خط جو نقطہ ن میں سے گذرتا ہے اور (مکافی ما^2 - ۴ ا لا = ۰ کے لحاظ سے) نقطہ ن کے قطبی پر عمود ہے ثابت نقطہ (عہ، بہ) میں سے گذرتا ہے - ثابت کرو کہ ن کا قطبی، مکافی

$(لا - ۲ ا + عہ)^2 + ۴ بہ ما = ۰$

کو لف کرتا ہے -

مثال ۲۱ - ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے لحاظ سے ایک دیے ہوئے نقطہ کا قطبی جبکہ دائرہ دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرے دو مکافیوں میں سے ایک یا دوسرے کو مس کرتا ہے -

مثال ۲۲ - ایک خطِ مستقیم دو دیے ہوئے خطوط و لا، و ما کو نقطوں ف، ق پر قطع کرتا ہے اور ف ق کا نقطہ وسطی ایک دیے ہوئے خط پر ہے - ثابت کرو کہ ف ق ایک مکافی کو لف کرتا ہے -

مثال ۲۳ - ف ق اور ف ر مکافی ما^2 - ۴ ا لا = ۰ کے وتر ہیں جو ما = ۰ کو علی الترتیب نقطوں (ج$_1$، ۰)، (ج$_2$، ۰) پر قطع کرتے ہیں - ثابت کرو کہ ق ر، مکافی (ج$_1$ + ج$_2$)^2 ما^2 = ۱۶ ا ج$_1$ ج$_2$ لا کو لف کرتا ہے -

مثال ۲۴ — ما^{۲} = ۴ ا لا کا ایک وتر متوازی ماسکی وتر کے طول کا ک گنا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر، مکافی ما^{۲} = ۴ اَ (لا + اَ) کو مس کرتا ہے جہاں اَ = ا (۱ - ک^{۲})۔

مثال ۲۵ — مکافی ما^{۲} - ۴ ا لا = ۰ کے نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد، خط ما = ک پر کے ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ف ق ر کے اضلاع مکافی لا^{۲} - ۲ ک ما = ۰ کو مس کرتے ہیں۔

پانچویں باب پر مثالیں

۱ — ایک مکافی کے لحاظ سے ایک نقطہ و کے قطبی پر نقطہ و سے عمود کھینچا گیا ہے جو قطبی سے نقطہ م پر ملتا ہے اور محور کو گ پر قطع کرتا ہے۔ قطبی، محور کو ت پر قطع کرتا ہے اور و میں سے گذرنے والا معین منحنی کو ن، نَ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقاط ت، ف، م، گ، ن، نَ سب کے سب ایک دائرہ پر ہیں جس کا مرکز س ہے۔

۲ — ثابت کرو کہ دو مکافی ما^{۲} = ا لا، لا^{۲} = ب ما ایک دوسرے کو زاویہ

$$\text{مس}^{-1}\frac{۳\,\text{ا}^{\frac{1}{3}}\,\text{ب}^{\frac{1}{3}}}{۲(\text{ا}^{\frac{2}{3}}+\text{ب}^{\frac{2}{3}})}$$

پر قطع کرینگے۔

۳ — اگر ایک مکافی کا ایک ماسکی وتر ن س ق ہو اور ن ا مرتب سے م پر ملے تو ثابت کرو کہ م ق مکافی کے محور کے متوازی ہوگا۔

۴ — ثابت کرو کہ اگر مکافی پر کے دو نقطوں کے مُعین ایک مستقل (۱۳
نسبت میں ہوں تو اِن نقطوں پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک

مکافی ہے۔

۵ — نقطہ ن سے مکافی م^2 - ۴ ا لا = ۰ کے دو مماس کھینچے گئے ہیں اور یہ مماس محور لا کے ساتھ زاویئے طہ$_1$، طہ$_2$ بناتے ہیں۔ ن کا طریق معلوم کرو (۱) جبکہ مس طہ$_1$ + مس طہ$_2$ مستقل ہو اور (۲) جبکہ مس^2 طہ$_1$ + مس^2 طہ$_2$ مستقل ہو۔

۶ — ایک مکافی کے اُن دو مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو جو ایک دوسرے کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتے ہیں۔

۷ — ثابت کرو کہ اگر ایک مکافی کے دو مماس کسی ثابت مماس پر ایک مستقل طول قطع کریں تو اِن کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک دوسرا مساوی مکافی ہے۔

۸ — ثابت کرو کہ ایک مکافی کے دو مماس جو علی الترتیب محور اور مرتب کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں لیکن علی القوائم نہیں ہیں وترِ خاص پر متقاطع ہوتے ہیں۔

۹ — ایک مکافی کے وترِ خاص پر کے کسی نقطہ سے اس کے سروں پر کے مماسوں پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو اِن عمودوں کے پائین کو ملاتا ہے مکافی کو مس کرتا ہے۔

۱۰ — اگر خط لا + ۴ ا = ۰ پر کے ایک نقطہ سے مکافی م^2 - ۴ ا لا = ۰ پر مماس کھینچے جائیں تو اِن کے وترِ تماس کے محاذی راس پر ایک قائمہ زاویہ بنے گا۔

۱۱ — ایک مکافی کے لحاظ سے ت کے قطبی پر ت سے عمود ت ل کھینچا گیا ہے جو محور سے مر پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ت ل × ت مر مستقل ہو تو ت کا طریق ایک مکافی ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ اگر ت ل : ت مر مستقل ہو تو ت کا طریق ایک مکافی ہوگا۔

۱۲ — دو مساوی مکافیوں کے محور متوازی ہیں اور ان کے راسوں پر کا مماس مشترک ہے۔ خطوطِ مستقیم کسی ایک محور کے متوازی

کھینچے گئے ہیں ۔ ثابت کرو کہ منحنیوں کے درمیان اِن خطوط کے جو حصے منقطع ہوتے ہیں اُن کے نقاط وسطی کا طریق ایک مساوی مکافی ہے ۔

۱۳ ـــ دو مکافی ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اور اِن کے محور متوازی ہیں ۔ ثابت کرو کہ اگر اِن مکافیوں کے دو نقطوں پر کے مماس اِن کے مشترک مماس پر متقاطع ہوں تو اِن کے نقاط تماس کو ملانے والا خط محور کے متوازی ہوگا۔

۱۴ ـــ دو مکافیوں کا محور وہی ہے ۔ ایک مکافی کے نقطوں سے دوسرے مکافی کے مماس کھینچے گئے ہیں ۔ ثابت کرو کہ دوسرے مکافی کے وتر تماس کے وسطی نقطے ایک ثابت مکافی پر واقع ہوتے ہیں ۔ (۱۲۷

۱۵ ـــ ایک مکافی کا ایک وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر کے نقطہ وسطی کا طریق ایک مکافی ہے ۔

۱۶ ـــ ایک وتر ن نَ کا نقطہ وسطی ایک ثابت خطِ مستقیم پر ہے جو ایک مکافی کے محور پر عمود ہے ۔ ثابت کرو کہ وتر کے قطب کا طریق دوسرا مکافی ہے ۔

۱۷ ـــ اگر ایک مکافی کے جس کا راس ا ہے دو مماس ت ف اور ت ق ہوں اور اگر خطوط ا ف، ا ت، ا ق (ممدودہ بہ ضرورت) مرتب کو علی الترتیب ف، ت، اور ق پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ ف ت = ت ق ۔

۱۸ ـــ اگر کسی نقطہ و میں سے ایک مکافی کا قطر کسی وتر سے ف پر ملے اور اس وتر کے سروں پر کے مماس قطر سے ق، قَ پر ملیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{و ف}^2 = \text{وق} \times \text{وقَ}$$ ـــ

۱۹ ـــ ایک مثلث کا راس ثابت ہے، قاعدہ کا طول مستقل ہے، اور قاعدہ ایک ثابت خطِ مستقیم پر حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث کے حائط دائرہ کے مرکز کا طریق ایک مکافی ہے ۔

۲۰ ـــ ثابت کرو کہ دائرہ

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\,\text{ل}\,\text{لا} - 3\,\text{ل}^2 = 0$$

کے لحاظ سے دائرہ

$$لا^2 + ما^2 - ۲ ا لا - ۳ ا^2 = ۰$$

پر کے کسی نقطہ کا قطبی مکافی

$$ما^2 + ۴ ا لا = ۰$$

کو مس کرے گا۔

۲۱ — ن س نَ ایک مکافی کا ایک ماسکی وتر ہے، ن نَ کا نقطہ وسطی ط ہے اور ط و، ن نَ پر عمود ہے اور محور کو و پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ س نَ اور س ن کے درمیان س و اور ط و حسابی اور ہندسی اوسط ہیں۔

۲۲ — ایک مکافی کے تین ماسکی وتر ف س ر، ق س ق، ماس رہیں، ق ر اُس قطر سے جو ف میں سے گذرتا ہے ا پر ملتا ہے، ر ف اُس قطر سے جو ق میں سے گذرتا ہے ب پر ملتا ہے، اور ف ق اُس قطر سے جو ر میں سے گذرتا ہے ج پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ تین نقطے ا، ب، ج ایک خطِ مستقیم پر ہیں جو س میں سے گذرتا ہے۔

۲۳ — ایک مکافی کے متوازی وتروں کے نظام میں سے ایک (۱۳۸)
وتر ن نَ ہے اور ن نَ پر و ایک ایسا نقطہ ہے کہ مستطیل ن و × و نَ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ و کا طریق ایک مکافی ہے۔

۲۴ — ایک مکافی کے نقطہ و میں سے گذرنے والے قطر پر دو نقطے ن، نَ لئے گئے ہیں ایسے کہ و ن × و نَ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ اگر نقاط ن، نَ سے مکافی کے مماس کھینچے جائیں تو مماسوں کے چار نقاطِ تقاطع دو ثابت خطوطِ مستقیم پر واقع ہوں گے جو و پر کے مماس کے متوازی اور اس سے مساوی فاصلہ پر واقع ہوں گے۔

۲۵ — اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع ایک مکافی کے گرد کھینچا جائے تو اس کے وتروں کے وسطی نقطوں میں سے گذرنے والا خط مکافی کے محور کے متوازی ہوگا۔

۲۶ — اگر ایک مکافی کے ایک ماسکی وتر پر کے کسی نقطہ سے دو مماس کھینچے جائیں تو یہ مماس اُن مماسوں کے ساتھ مساوی میلان رکھیں گے جو ماسکی وتر کے سروں پر کھینچے گئے ہوں -

۲۷ — اگر ایک مکافی کے دو مماس ایک ثابت خط مستقیم کے ساتھ مساوی زاوئے بنائیں تو ثابت کرو کہ وتر تماس ایک ثابت نقطہ میں سے گذرنا چاہیئے -

۲۸ — دو مکافی ایک مشترک مماس رکھتے ہیں اور ان کے محور مخالف سمتوں میں ہیں - ثابت کرو کہ اگر ان میں سے ایک مکافی کے وتر دوسرے کو مس کرتے ہوئے کھینچے جائیں تو ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک دوسرا مکافی ہوگا -

۲۹ — ایک مکافی کے ایسے وتر کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو جسکے محاذی راس پر قائمہ زاویہ بنے -

۳۰ — مکافی $ما^{۲} - ۴ ل لا = ۰$ کے عماد وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق

$$\frac{ما^{۲}}{ل^{۲}} + \frac{۴ ل^{۳}}{ما^{۲}} = لا - ۲ل$$ ہے -

۳۱ — ایک مکافی کا ایک وتر ف ق ہے جو ف پر عماد ہے، ا ق کو راس ا سے کھینچا گیا ہے اور ف میں سے ایک خط، ا ق کے متوازی کھینچا گیا ہے جو محور سے س پر ملتا ہے - ثابت کرو کہ ا س، ف کے ماسکی فاصلہ کا دگنا ہے -

۳۲ — ایک مکافی کے متوازی وتر کھینچے گئے ہیں - ثابت کرو کہ ان وتروں کے سروں پر کھینچے ہوئے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے، نیز عمادوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق بھی ایک خط مستقیم ہے اور وتروں کی مختلف سمتوں کے لیے ان دو خطوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک مکافی ہے -

۳۳ — اگر ایک مکافی کے دو نقطوں پر کے عماد منحنی پر متقاطع ہوں (۱۳۹

تو ان نقطوں کو ملانے والا خط محور پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے گا -

۳۴ — اگر ایک مکافی کے دو نقطوں پر کے عماد محور کے ساتھ زاویوں طہ، فہ پر مائل ہوں اور مس طہ مس فہ = ۲ تو ثابت کرو کہ وہ مکافی پر متقاطع ہوں گے۔

۳۵ — ایک ایسے نقطہ کا طریق جس سے دو ایسے عماد کھینچے جا سکیں کہ محور کے ساتھ ان کے زاویے متکملہ ہوں ایک مکافی ہوگا۔

۳۶ — ایک نقطہ ن سے مکافی کے عماد کھینچے گئے ہیں اور ان میں سے دو عماد ایک دئے ہوئے خط کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک مکافی ہے۔

۳۷ — ایک مکافی کے نقطہ ن پر کا عماد محور سے گ پر ملتا ہے، ن گ کو ہ تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ گ ہ = $\frac{1}{2}$ ن گ۔ ثابت کرو کہ نقطہ ہ میں سے گذرنے والے مکافی کے دوسرے دو عماد ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

۳۸ — ایک مکافی کے تین نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد نقطہ و پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ س ن + س ق + س ر + س ا = ۲ و م جہاں س ماسکہ ہے اور راس پر کے مماس پر و سے عمود و م ہے۔

۳۹ — ایک مکافی کے کوئی تین مماس مستقل رقبہ کا ایک مثلث بنائیں گے اگر محور کے ساتھ ان میلانوں کے مماس کسی دئے ہوئے سلسلہ موسیقیہ میں ہوں۔

۴۰ — ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جو ایک مکافی کے تین عمادوں سے بنتا ہے

$$\frac{\text{ا}^{2}}{2}(\text{م}_{1}-\text{م}_{2})(\text{م}_{2}-\text{م}_{3})(\text{م}_{3}-\text{م}_{1})(\text{م}_{1}+\text{م}_{2}+\text{م}_{3})^{2}$$

ہے۔

۴۱ — اگر ایک مکافی کا ایک مماس دو دئے ہوئے متوازی خطوط مستقیم کو ف، ق پر قطع کرے تو ف، ق سے منحنی کے دوسرے دو مماسوں کے نقطہ تقاطع

کا طریق ایک مکافی ہوگا۔

۴۲ ۔ اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث ایک مکافی کے گرد کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ خطوط جو مثلث کے کسی راس سے ماسکے تک کھینچے جائیں مقابل کے ضلع کے نقطہ تماس میں سے گذریں گے۔

۴۳ ۔ ما^{2} = ا (لا + ج) پر کے کسی نقطہ سے ما^{2} = ۴ ا لا کے مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاط تماس پر اس مکافی کے عماد ایک ثابت خطِ مستقیم پر متقاطع ہوتے ہیں۔

۴۴ ۔ مکافی ما^{2} - ۴ ا لا = ۰ کے ثابت نقطہ (لا$_{1}$، ما$_{1}$) میں سے وتر کھینچے گئے ہیں جو علی القوائم ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے دوسرے سروں کو ملانیوالا خط ثابت نقطہ (لا$_{1}$ + ۴ ا، - ما$_{1}$) میں سے گذرتا ہے۔

۴۵ ۔ اگر ایک ثابت نقطہ میں سے ایک مکافی کا کوئی وتر کھینچا جائے اور وتر کے سروں پر عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق دوسرا مکافی ہے۔

۴۶ ۔ اگر ایک نقطہ سے مکافی ما^{2} = ۴ ا لا کے تین عماد محور کو ایسے نقطوں پر قطع کریں جن کے فاصلے راس سے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ نقطہ منحنی ۲۷ ا ما^{2} = ۲ (لا - ۲ ا)^{3} پر واقع ہے۔

۴۷ ۔ ما^{2} - ۴ ا لا = ۰ کے عماد وتروں کے قطبوں کا طریق (لا + ۲ ا) ما^{2} + ۴ ا^{3} = ۰ ہے۔

۴۸ ۔ ایک مکافی کے کسی دو ماسکی وتروں کو قطر مان کر دو دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا مشترک وتر مکافی کے راس میں سے گذرتا ہے۔

۴۹ ۔ ایک دیئے ہوئے مکافی کے دو مماس محور کے ساتھ ایسے زاویے بناتے ہیں کہ ان کے نصفوں کے مماسوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ہم ماسکی مکافی ہے۔

۵۰ ۔ اگر وہ دائرہ جو ایک مکافی کے وتر ف ق پر اس کو قطر مان کر کھینچا گیا ہو مکافی کو مکرر نقطوں ر، س پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ف ق

اور ر، س مکافی کے محور پر ایک مستقل طول قطع کرتے ہیں۔

۵۱ — اگر ف، ق، ر پر کے عماد نقطہ و پر ملیں اور ف، ق، ر میں سے خطوط ف فَ، ق قَ، ر رَ کھینچے جائیں جو محور کے ساتھ وہی زاویے بنائیں جو ف و، ق و، ر و علی الترتیب بناتے ہیں تو ثابت کرو کہ ف فَ، ق قَ، ر رَ دوسرے نقطہ وَ میں سے گذرتے ہیں اور خط و وَ، وَ کے قطبی پر عمود ہے۔

۵۲ — ایک مکافی کے عماد جو ف، ق، ر پر کھینچے گئے ہیں نقطہ و پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ و ف × و ق × و ر = ا × و ل × و م جہاں و ل اور و م، نقطہ و سے مکافی کے مماس ہیں اور ۴ ا وتر خاص کا طول ہے۔

(۴۱ ۵۳ — اگر ایک خطِ مستقیم کے کسی نقطہ سے جہاں خطِ مستقیم ایک مکافی کے محور پر عمود ہے مکافی کے عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ اُس مثلث کے ضلعوں کے مربعوں کا مجموعہ جو اِن عمادوں کے پائینوں کو ملانے سے بنتا ہے مستقل ہے۔

۵۴ — ایک مکافی کے تین مماسوں سے ایک مثلث ا ب ج بنایا گیا ہے، اور دوسرا مثلث د ع ف اُن نقطوں کو ملانے سے بنایا گیا ہے جن پر دو نقاط تماس میں سے گذرنے والا وتر، تیسرے نقطہ تماس میں سے گذرنے والے قطر کو قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ د ع ف کے وسطی نقطے ا، ب، ج ہیں۔

۵۵ — اگر ایک مثلث ا ب ج کو ایک مکافی میں کھینچا گیا ہو اور اَ بَ جَ وہ مثلث ہو جو مثلث ا ب ج کے ضلعوں کے متوازی تین مماسوں سے بنا ہے تو ثابت کرو کہ ا ب ج کے ضلع اَ بَ جَ کے متناظر ضلعوں کے چار گنا ہوں گے۔

۵۶ — اگر چار خطوطِ مستقیم ایک مکافی کو مس کریں تو ثابت کرو کہ ان میں سے دو کے نقطۂ تقاطع اور دیگر دو کے نقطہ تقاطع کے فصلوں سے مربعوں کا حاصل ضرب چار نقاطِ تماس کے فصلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۵۷ — ت سے ایک مکافی کے مماس ت ف اور ت ق ہیں اور کسی دوسرے مماس پر ف، ت، ق سے عمود طول میں علی الترتیب ع$_{۱}$، ع$_{۲}$، ع$_{۳}$ ہیں۔ ثابت کرو کہ ع$_{۱}$ ع$_{۳}$ = ع$_{۲}^{۲}$۔

۵۸ — و سے ایک مکافی کے مماس و ا اور و ب ہیں اور متناظر عماد ا ف، ب ف ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ف ایک ثابت خط پر واقع ہو جو محور پر عمود ہے تو و ایک مکافی کو مرتسم کرے گا۔ و کا طریق معلوم کرو اگر ف ایک ثابت قطر پر واقع ہو۔

۵۹ — مکافی ما^{۲} – ۴ ا لا = ۰ کے نقطہ ف پر کا عماد ف گ ہے جہاں گ محور پر ہے۔ گ ف کو باہر وار نقطہ ق تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ ف ق = گ ف۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک مکافی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ف اور ق جن مکافیوں پر واقع ہیں اُن کے نقطوں ف اور ق پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق

ما^{۲} (لا + ۴ ا) + ۱۶ ا^{۳} = ۰

ہے۔

۶۰ — مکافی ما^{۲} – ۴ ا لا = ۰ کا ایک وتر ثابت نقطہ (عہ، بہ) میں سے گذرتا ہے اور اِس کے ہر سرے میں سے ایک خطِ مستقیم دوسرے سرے پر کے مماس کے متوازی کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اِن دو خطوں کے نقطہ تقاطع کا طریق مکافی

۴ ما^{۲} – ۶ بہ ما = ۴ ا (لا – ۳ عہ)

ہے۔

۶۱ — اگر ما^{۲} – ۴ ا لا = ۰ کے نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد نقطہ (۱۳۲)
(عہ، بہ) پر ملیں تو مثلث ف ق ر کا مرکز عمودی (عہ – ۶ ا، – $\frac{بہ}{۲}$) ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ ف ق ر کا مرکز ہندسی {$\frac{۲}{۳}$ (عہ – ۲ ا)، ۰} ہے۔

۶۲ — کسی نقطہ (عہ، بہ) سے مکافی ما^{۲} – ۴ ا لا = ۰ کے تین عماد کھینچے

گئے ہیں اور اِن کے پائینوں پر مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُس مثلث کے راسوں کے محدد جو اِن مماسوں سے بنے مساواتوں

$$\text{لا}^{3} + \text{لا}^{2}\,(\text{ع} - 2\,\text{ا}) - \text{ا}\,\text{یہ}^{2} = 0$$

اور

$$\text{ما}^{2} - \text{ا}\,\text{ما}\,(\text{ع} - 2\,\text{ا}) + \text{ا}^{2}\,\text{یہ} = 0$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

۶۳ — ایک مکافی پر کوئی تین نقطے ف، ق، ر ہیں۔ ف، ق، ر میں سے گذرنے والے قطر وتروں ف ق، ق ر، ر ف سے علی الترتیب رَ، قَ، فَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق رَ، ر فَ، ف قَ علی الترتیب ف، ق، ر پر کے مماسوں کے متوازی ہیں۔

۶۴ — ایک مکافی کے نقطہ ف پر کا عماد محور کو گ پر قطع کرتا ہے اور ق، ر پر کے عماد، ف گ کے نقطہ وسطی میں سے گذرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق ر، مرتب کے پائیں میں سے گذرتا ہے۔

۶۵ — ایک مکافی کے نقطہ ف سے مکافی کے دو عماد کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن عمادوں اور ف میں سے گذرنے والے قطر کے درمیانی زاویوں کے ناصف اور ف پر کا عماد ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۶۶ — نقطہ (- ۳ ا، ۰) میں سے گذرنے والا کوئی خط مکافی $\text{ما}^{2} - 4\,\text{ا}\,\text{لا} = 0$ کو نقطوں ف، ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جو ف، ق اور راس کہ میں سے گذرتا ہے مکافی کو مس کرتا ہے۔

۶۷ — ف، ق، ر پر کے عماد ہم نقطہ ہیں اور ف ق، ر میں سے گذرنے والے قطر سے مرتب پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف ق، مکافی $\text{ما}^{2} + 12\,\text{ا}\,(\text{لا} + \text{ا}) = 0$ کو مس کرتا ہے۔

۶۸ — مکافی $\text{ما}^{2} - 4\,\text{ا}\,\text{لا} = 0$ کے نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد، خط لا = ع پر کے ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ف ق ر کے اضلاع مکافی $\text{ما}^{2} = 16\,\text{ا}\,(\text{لا} + 2\,\text{ا} - \text{ع})$ کو مس کرتے ہیں۔

۶۹ — $\text{ما}^{2} - 4\,\text{ا}\,\text{لا} = 0$ میں ایک مثلث بنایا گیا ہے اور اِس کے

دو اضلاع، $ما^2 - ۴ب(لا+ج) = ۰$ کو مس کرتے ہیں۔ تیسرے ضلع کا لفاف معلوم کرو۔

(۱۴۳) ۷۰ — $ما^2 - ۴ الا = ۰$ کے نقطوں ق، س پر کے عماد مکافی سے نقطہ ف پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ (۱) مثلث ف، ق، س کے مرکز عمودی کا طریق مکافی $ما^2 = ا(لا + ۶ا)$ ہے اور (۲) حائط دائرہ کے مرکز کا طریق مکافی $۲ما^2 - الا + ا^2 = ۰$ ہے۔

۷۱ — اگر $ما^2 - ۴ اَ لا = ۰$ پر کے کسی نقطہ سے مکافی $ما^2 - ۴ الا = ۰$ کے مماس کھینچے جائیں تو نقاط تماس پر کے عماد منحنی $ما^2(ا - ۴اَ)^2 + ۴ اَ اَ (لا - ۲ا)^2 = ۰$ پر ملیں گے۔

۷۲ — مکافی $ما^2 - ۴ الا = ۰$ کا کوئی وتر ثابت نقطہ (عہ، یہ) میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اُس مثلث کا مرکز ہندسی جو وتر اور اس کے سروں پر کے مماسوں سے بنتا ہے مکافی $۲ما^2 - یہ ما - ۶ الا + ۲اعہ = ۰$ کو مرتسم کرتا ہے۔

۷۳ — مکافی $ما^2 - ۴ الا = ۰$ میں مثلث ف ق س بنایا گیا ہے اور ف ق، ف س علی الترتیب نقاط (۰، ۴ا)، (۰، - ۴ا) میں سے گذرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف ق، دائرہ $لا^2 + ما^2 - ۴ الا = ۰$ کو مس کرتا ہے۔

۷۴ — $ما^2 - ۴ الا = ۰$ کا کوئی مماس خطوط $ما - م(لا - ج) = ۰$ اور $ما = مَ(لا - ج)$ کو علی الترتیب ف، ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف، ق سے مکافی کے دوسرے مماس اُس منحنی پر متقاطع ہوتے ہیں جس کی مساوات

$$ا^2(م - مَ)^2(لا+ج)^2 = (ج م مَ - ا)^2(ما^2 - م ا لا)$$

ہے۔

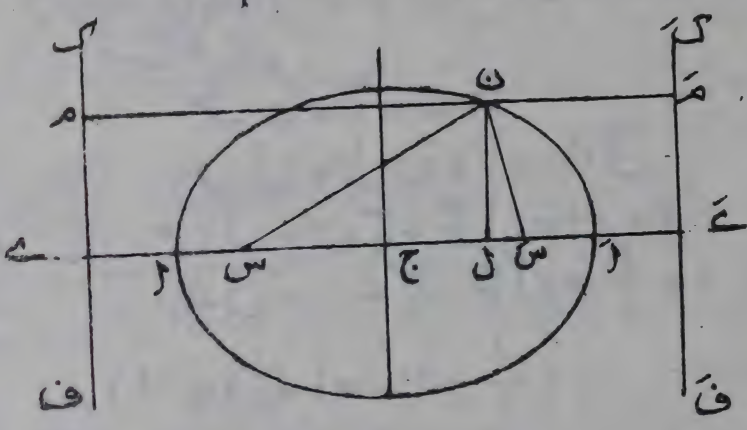
۷۵ — ثابت کرو کہ $ما^2 - ۴ الا = ۰$ میں ایسے بیشمار مثلث کھینچے جا سکتے ہیں جو $لا^2 - ۴ب ما = ۰$ کے لحاظ سے خود قطبی ہوں۔ نیز ثابت کرو کہ مثلثوں کے ہندسی مرکزوں کا طریق $۳ما^2 = ۴ الا$ ہے۔

چھٹا باب

قطع ناقص

تعریف ۔ قطع ناقص ایک نقطہ کا طریق ہوتا ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ، ایک ثابت خط سے اس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے جو اکائی سے کم ہوتی ہے ۔ ثابت نقطہ کو ماسکہ اور ثابت خط کو مرتب کہتے ہیں ۔

۱۰۹ ۔ ناقص کی مساوات معلوم کرنا ۔



فرض کرو کہ س ماسکہ اور ک ف مرتب ہے ۔

س سے ، مرتب پر عمود کھینچو۔
ے س کو ا پر اس طرح تقسیم کرو کہ س ا : ا ے = دی ہوئی
نسبت = ز : ا (فرض کرو) ۔
ے س ممدودہ میں ایک ایسا نقطہ اَ ہوگا کہ
س اَ : ے اَ = ز : ا
فرض کرو کہ ا اَ کا نقطہ وسطی ج ہے اور ا اَ = ۲ ا (۱۴
تب ا س = ز × ے ا ، اور س اَ = ز × ے اَ
∴ ا س + س اَ = ز (ے ا + ے اَ)
∴ ۲ ا ج = ۲ ز × ے ج
∴ ے ج = ا/ز ، .... (۱)
نیز س اَ - س ا = ز (ے اَ - ے ا)
یا ا اَ - ۲ ا س = ز × ا اَ
∴ س ج = ز × ا ج = ا ز ، .... (۲)
اب فرض کرو کہ ج کو مبدا ، ج اَ کو محور لا ، اور ج اَ کے
عمود وار ایک خط کو محور ما قرار دیا گیا ہے ۔
فرض کرو کہ منحنی پر کوئی نقطہ ن ہے اور اس کے محدد (لا ، ما) ہیں۔
تب شکل میں
س ن۲ = ز۲ × ن م۲
∴ س ل۲ + ل ن۲ = ز۲ × ے ل۲
اب س ل = س ج + ج ل = ا ز + لا ،
اور ے ل = ے ج + ج ل = ا/ز + لا
∴ (ا ز + لا)۲ + ما۲ = ز۲ (لا + ا/ز)۲
یا ما۲ + لا۲ (۱ - ز۲) = ا۲ (۱ - ز۲)
یا لا۲/ا۲ + ما۲/(ا۲ (۱ - ز۲)) = ۱ ، .... (۳)

$\text{لا} = \cdot$ رکھنے سے $\text{ما} = \pm\, \text{ا}\sqrt{\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}}}$ حاصل ہوتا ہے جس سے محور ما پر کے وہ مقطوعے حاصل ہوتے ہیں جو منحنی قطع کرتا ہے - اگر اِن طولوں کو ± ب لکھا جائے تو

$$\text{ب}^{\text{۲}} = \text{ا}^{\text{۲}}\left(\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}}\right)، \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۴})$$

اور مساوات (۳) شکل

$$\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{ا}^{\text{۲}}} + \frac{\text{ما}^{\text{۲}}}{\text{ب}^{\text{۲}}} = \text{۱}، \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۵})$$

اختیار کرتی ہے -

وتر خاص وہ وتر ہے جو ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور مرتب کے (٦
متوازی ہوتا ہے - اِس کا طول معلوم کرنے کے لیے مساوات (۵) میں لا = - ز ا رکھنا چاہئے -

$$\text{تب} \qquad \text{ما}^{\text{۲}} = \text{ب}^{\text{۲}}\left(\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}}\right) = \frac{\text{ب}^{\text{۴}}}{\text{ا}^{\text{۲}}}، \quad (\text{۴}) \text{ سے}$$

اِس لیے نیم وتر خاص کا طول $\frac{\text{ب}^{\text{۲}}}{\text{ا}}$ ہے -

۱۱۰ — مساوات (۵) [دفعہ ۱۰۹] میں ما کی قیمت ب سے بڑی نہیں ہوسکتی کیونکہ اگر ایسا ہو تو $\text{لا}^{\text{۲}}$ منفی ہوگا، اسی طرح لا، ا سے بڑا نہیں ہوسکتا - پس قطع ناقص ایک ایسا منحنی ہے جو تمام سمتوں میں محدود ہوتا ہے -

اگر لا عدداً ا سے کم ہو تو $\text{ما}^{\text{۲}}$ مثبت ہوگا اور لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے ما کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں حاصل ہونگی - اِس لیے محور لا منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے -

اسی طرح اگر ما عدداً ب سے کم ہو تو $\text{لا}^{\text{۲}}$ مثبت ہوگا اور ما کی کسی مخصوص قیمت کے لیے لا کی دو قیمتیں حاصل ہونگی جو مساوی اور

مختلف العلامت ہوں گی۔ اس لیے محور ما منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اِس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر محور لا پر نقطے سَ ، ےَ ایسے لیے جائیں کہ ج سَ = س ج اور ج ےَ = ے ج تو نقطہ سَ بھی منحنی کا ماسکہ ہوگا اور ےَ میں سے گذرنیوالا وہ خط جو ج ےَ پر عمود ہو متناظر مرتب ہوگا۔

اگر منحنی پر کوئی نقطہ (لاَ ، ماَ) ہو تو محدد (لاَ ، - ماَ) مساوات $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کو پورا کرینگے اور یہ ظاہر ہے کہ ایسی صورت میں محدد (- لاَ ، - ماَ) بھی مساوات کو پورا کرینگے اور اِس لیے نقطہ (- لاَ ، - ماَ) بھی منحنی پر ہوگا۔ لیکن نقطے (لاَ ، ماَ) اور (- لاَ ، - ماَ) مرکز میں سے گذرنے والے ایک خط مستقیم پر ہیں اور مبدا ا سے مساوی فاصلوں پر ہیں۔ پس مبدا ہر ایسے وتر کی تنصیف کرتا ہے جو اس میں سے گذرتا ہے اور اِس لیے اِس کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں۔

وہ وتر جو ماسکوں میں سے گذرتا ہے محور اعظم کہلاتا ہے اور وہ وتر جو مرکز میں سے گذر کر محور اعظم پر عمود ہوتا ہے محور اصغر کہلاتا ہے۔

۱۴۱) ۱۱۱ ۔ ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلے معلوم کرنا۔

دفعہ ۱۰۹ کی شکل میں چونکہ س ن = ز × ن م اس لیے

س ن = ز × ے ل = ز (ے ج + ج ل) = ز ($\frac{ا}{ز}$ + لا) = ا + ز لا

نیز سَ ن = ز × ل ےَ = ز (ج ےَ - ج ل) = ا - ز لا

∴ س ن + سَ ن = ۲ ا

بعض اوقات ناقص کی یہ تعریف کی جاتی ہے کہ وہ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔

اس تعریف سے منحنی کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ مستقل مجموعہ ۲ ا ہے۔ فرض کرو کہ دو ثابت نقطوں کے درمیان فاصلہ ۲ ا ز ہے۔

اِن ثابت نقطوں کو ملانے والے خط کے وسطی نقطہ کو مبداء قرار دو۔ فرض کرو کہ یہ خط اور اس کے عمود وار دوسرا خط محاور لا اور ما ہیں۔ تب دی ہوئی شرط سے

$$\sqrt{(\text{لا} - \text{ا ز})^2 + \text{ما}^2} + \sqrt{(\text{لا} + \text{ا ز})^2 + \text{ما}^2} = ۲\,\text{ا}$$

اِس کو منطبق بنانے سے $\text{ما}^2 + \text{لا}^2(۱ - \text{ز}^2) = \text{ا}^2(۱ - \text{ز}^2)$

اور یہ وہی مساوات ہے جو سابق میں حاصل ہو چکی ہے۔

۱۱۲ — ناقص کی قطبی مساوات جبکہ مرکز کو قطب کے طور پر لیا جائے مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ میں لا کی بجائے ر جم ط اور ما کی بجائے ر جب ط لکھنے سے حاصل ہو گی۔ اس لیے یہ مساوات

$$\frac{\text{ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{ط}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ر}^2\,\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{ب}^2} = ۱$$

یا

$$\frac{۱}{\text{ر}^2} = \frac{\text{جم}^2\,\text{ط}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{ب}^2}\text{،} \quad \ldots\ldots (۱)$$

ہے۔ اِس مساوات کو شکل

$$\frac{۱}{\text{ر}^2} = \frac{۱}{\text{ا}^2} + \left(\frac{۱}{\text{ب}^2} - \frac{۱}{\text{ا}^2}\right)\text{جب}^2\,\text{ط}\text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

میں لکھا جا سکتا ہے اب چونکہ $\frac{۱}{\text{ب}^2} - \frac{۱}{\text{ا}^2}$ مثبت ہے ہم مساوات (۲) سے دیکھتے ہیں کہ $\frac{۱}{\text{ر}^2}$ کی کم سے کم قیمت $\frac{۱}{\text{ا}^2}$ ہے اور $\frac{۱}{\text{ر}^2}$ بڑھتا ہے جیسے

طہ صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے - نیز $\frac{1}{r^2}$ کی بڑی سے بڑی قیمت $\frac{1}{ب^2}$ ہے - اِس لیے سمتی نصف قطر ا سے ب تک گھٹتا ہے جیسے طہ صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے -

ہم معلوم کر چکے ہیں کہ ناقص پر کے تمام نقطوں کے لیے

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - 1 = 0$$

اُس طریقہ پر جو دفعہ ۹۲ میں اختیار کیا گیا تھا یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر منحنی کے اندر کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہوں تو $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - 1$ منفی ہوگا اور اگر منحنی کے باہر کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہوں تو $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - 1$ مثبت ہوگا -

۱۱۴ — ایک ناقص اور ایک معلومہ خطِ مستقیم کے نقاط تقاطع معلوم کرنا اور وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک دیا ہوا خط ایک ناقص کو مس کرے -

[نوٹ: ہم آیندہ ناقص کی مساوات کو ہمیشہ $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ لینگے اِلّا آنکہ اس کے خلاف بیان کیا گیا ہو -]

فرض کرو کہ خطِ مستقیم کی مساوات

$$ما = م لا + ج ، \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ہے -

اُن نقطوں پر جو خطِ مستقیم اور ناقص میں مشترک ہیں دونوں رشتے پورے ہوتے ہیں - پس مشترک نقطوں پر

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{(\text{م لا} + \text{ج})^2}{\text{ب}^2} = 1$$

یا $$\text{لا}^2(\text{ب}^2 + \text{ا}^2\,\text{م}^2) + 2\,\text{م ج}\,\text{ا}^2\,\text{لا} + \text{ا}^2(\text{ج}^2 - \text{ب}^2) = 0 \ldots (2)$$

یہ ایک دو درجی مساوات ہے اور ہر دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں حقیقی، منطبق، یا خیالی -

پس لا کی دو قیمتیں ہیں اور ان کے جواب میں ما کی دو قیمتیں مساوات (۱) سے حاصل ہوتی ہیں -

مساوات (۲) کی اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہونگی اگر (۴۹)

$$\text{ا}^2(\text{ج}^2 - \text{ب}^2)(\text{ب}^2 + \text{ا}^2\,\text{م}^2) = \text{م}^2\,\text{ج}^2\,\text{ا}^4$$

یعنے اگر $$\text{ج}^2 = \text{ا}^2\,\text{م}^2 + \text{ب}^2$$

لا کی دو قیمتیں ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو (۱) کی رو سے ما کی دو قیمتیں بھی ایک دوسرے کے مساوی ہونی چاہییں -

پس وہ دو نقطے جنمیں ناقص، خط مستقیم سے منقطع ہوتا ہے منطبق ہوں گے اگر

$$\text{ج} = \sqrt{\text{ا}^2\,\text{م}^2 + \text{ب}^2},$$

اس لیے وہ خط جس کی مساوات

$$\text{ما} = \text{م لا} + \sqrt{\text{ا}^2\,\text{م}^2 + \text{ب}^2}, \ldots\ldots\ldots (3)$$

ہے م کی تمام قیمتوں کے لیے ناقص کو مس کرے گا -

چونکہ (۳) میں علامت جذر کے قبل مثبت یا منفی کوئی علامت

رکھی جا سکتی ہے اِس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ م کی ہر قیمت کے لیے ناقص کے دو مماس ہیں یعنی کسی دیے ہوئے خطِ مستقیم کے متوازی دو مماس ہوتے ہیں -- یہ دو مماس ناقص کے مرکز سے مساوی فاصلوں پر ہوتے ہیں۔

۱۱۵ - ناقص پر کے دو نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات معلوم کرنا اور کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنا-

فرض کرو کہ ناقص پر کے دو نقطوں کے محدد (لاَ، ماَ) اور (لاً، ماً) ہیں۔

$$\text{مساوات}\quad \frac{(\text{لا}-\text{لاَ})(\text{لا}-\text{لاً})}{\text{ا}^{2}}+\frac{(\text{ما}-\text{ماَ})(\text{ما}-\text{ماً})}{\text{ب}^{2}}$$

$$=\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}}+\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}}-1\text{،}\ \ldots\ldots\ (1)$$

مختصر کرنے پر پہلے درجہ کی مساوات ہے اور اس لیے وہ ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔

اس مساوات میں اگر لا کی بجائے لاَ اور ما کی بجائے ماَ رکھا جائے تو دائیں جانبی رُکن متماثلاً معدوم ہوتا ہے اور بائیں جانبی رکن بھی معدوم ہوتا ہے کیونکہ نقطہ (لاَ، ماَ) ناقص پر ہے۔

پس نقطہ (لاَ، ماَ) خط (۱) پر ہے اور اسی طرح (لاً، ماً) بھی اِس خط پر ہے۔

اِس لیے مساوات (۱) اُس خط کی مطلوبہ مساوات ہے جو (لاَ، ماَ) اور (لاً، ماً) میں سے گذرتا ہے--

یہ مساوات شکل

$$\frac{\text{لا}(\text{لاَ}+\text{لاً})}{\text{ا}^{2}}+\frac{\text{ما}(\text{ماَ}+\text{ماً})}{\text{ب}^{2}}=1+\frac{\text{لاَ}\,\text{لاً}}{\text{ا}^{2}}+\frac{\text{ماَ}\,\text{ماً}}{\text{ب}^{2}}\text{،}\ \ldots\ldots\ (2)$$

میں لکھی جا سکتی ہے--

(لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات (۲) میں لاً = لاَ اور ماً = ماَ رکھنا چاہئے، چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{لا\,لاَ}{ا^2} + \frac{ما\,ماَ}{ب^2} = ۱ \quad ....(۳)$$

نتیجہ صریح ۱ — محور اعظم کے سروں کے محدد علی الترتیب (ا، ۰) اور (-ا، ۰) ہیں اور (۳) سے اِن نقطوں پر کے مماس لا = ا اور لا = -ا ہیں۔

پس محور اعظم کے سروں پر کے مماس محور اصغر کے متوازی ہیں۔
اسی طرح محور اصغر کے سروں پر کے مماس محور اعظم کے متوازی ہیں۔

نتیجہ صریح ۲ — نقطہ (لاَ، ماَ) پر کا مماس نقطہ (-لاَ، -ماَ) پر کے مماس کے متوازی ہوتا ہے اور یہ دو نقطے ایک خطِ مستقیم پر ہوتے ہیں جو مرکز میں سے گذرتا ہے۔

پس ناقص کے مرکز میں سے گذرنے والے کسی وتر کے سروں پر کے مماس ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

۱۱۶— وہ شرط معلوم کرنا کہ خط ل لا + م ما + ن = ۰ ناقص کو مس کرے۔

خطِ مستقیم $ل\,لا + م\,ما + ن = ۰ \quad ....(۱)$

ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱ \quad ....(۲)$

کو جہاں قطع کرتا ہے اُن نقطوں کو مبداء سے ملانے والے خطوں کی مساوات [دفعہ ۳۸]

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - \left(\frac{ل\,لا + م\,ما}{ن}\right)^2 = ۰ \quad ....(۳)$$

ہے -

اگر خطِ مستقیم (۲) ناقص کو منطبق نقطوں پر قطع کرے تو مساوات

(۱۵۱) (۳) منطبق خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے گی۔ اس لیے (۳) کا دائیں جانبی رکن ایک کامل مربع ہونا چاہیئے، اس کے لیے شرط

$$\left(\frac{۱}{ا^۲} - \frac{ل^۲}{ن^۲}\right)\left(\frac{۱}{ب^۲} - \frac{م^۲}{ن^۲}\right) = \frac{ل^۲ م^۲}{ن^۴}$$

ہے۔ اس لیے مطلوبہ شرط ہے

$$ا^۲ ل^۲ + ب^۲ م^۲ = ن^۲ ، \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

نتیجہ صریح - خط لا جم عہ + ما جیب عہ - ع = ۰ ناقص کو مس کرے گا اگر

$$ا^۲ جم^۲ عہ + ب^۲ جب^۲ عہ = ع^۲ ، \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

۱۱۷ - ناقص کے کسی نقطہ پر عماد کی مساوات معلوم کرنا -

ناقص کے کسی نقطہ (لاَ ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{لا لاَ}{ا^۲} + \frac{ما ماَ}{ب^۲} = ۱$$

ہے - عماد وہ خط ہے جو نقطہ (لاَ ، ماَ) میں سے گذر کر مماس پر عمود ہوتا ہے - اس لیے اس کی مساوات [دفعہ ۳۰]

$$\frac{(لا - لاَ)}{\frac{لاَ}{ا^۲}} = \frac{ما - ماَ}{\frac{ماَ}{ب^۲}} ،$$

ہے -

مثالیں

۱ - حسب ذیل ناقصوں کے خروج المرکز اور ماسکوں کے محدد معلوم کرو -

(۱) ۲ لا^{۲} + ۳ ما^{۲} − ۱ = ۰ ، (۲) ۸ (لا − ۱)^{۲} + ۶ (ما + ۱)^{۲} − ۱ = ۰

جواب: (۱) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ، ($\pm \frac{۱}{\sqrt{۶}}$ ، ۰) ، (۲) $\frac{۱}{۲}$ ، (۱ ، −۱ $\pm \frac{۱}{۱۲}\sqrt{۶}$)

۲ — مثال ۱ کے ناقصوں کے وتر خاص کے طول معلوم کرو۔

جواب: $\frac{۲}{۳}\sqrt{۲}$ اور $\frac{۱}{۴}\sqrt{۶}$

۳ — ثابت کرو کہ خط ما = لا + $\sqrt{\frac{۵}{۶}}$ ، ناقص ۲ لا^{۲} + ۳ ما^{۲} = ۱ کو مس کرتا ہے۔

۴ — ثابت کرو کہ خط ۳ ما = لا − ۳ ، منحنی ۴ لا^{۲} − ۳ ما^{۲} − ۲ لا = ۰ کو دو نقطوں پر جو محور ما سے مساوی فاصلوں پر ہیں قطع کرتا ہے۔

۵ — نقطہ (۲ ، ۱) ناقص ۲ لا^{۲} + ۳ ما^{۲} − ۱۲ = ۰ کے باہر ہے یا اندر؟

۶ — $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}}$ = ۱ کے ان مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو محور (۱۵۲)
لا کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتے ہیں۔

۷ — ۲ لا^{۲} + ۳ ما^{۲} = ۶ کے وتر خاص کے سروں پر کے (۱) مماسوں کی مساواتیں اور (۲) عمادوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

چار نقطے (± ۱ ، ± $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$) ہیں۔

۸ — $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}}$ = ۱ کے ان مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو محوروں پر مساوی مقطوعے قطع کرتے ہیں۔

جواب: لا ± ما ± $\sqrt{ا^{۲} + ب^{۲}}$ = ۰

۹ — ثابت کرو کہ مساوات ۴ لا^{۲} + ۲ ما^{۲} = ۶ لا ایک ناقص کو تعبیر

کرتی ہے جس کا خروج المرکز $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ہے اور ثابت کرو کہ مبدا محور اصغر کے ایک سرے پر ہے۔

۱۰ — اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (-۱، ۱)، مرتب ۴ لا - ۳ ما = ۰ اور خروج المرکز $\frac{5}{6}$ ہے۔

جواب: ۲۰ لا^2 + ۲۴ لا ما + ۲۷ ما^2 + ۲۷ (لا - ما + ۱) = ۰

۱۱ — اگر ایک ناقص کے وتر خاص کے سرے پر کا عماد محور اصغر کے ایک سرے میں سے گذرے تو ثابت کرو کہ نحنی کا خروج المرکز مساوات ز^4 + ز^2 - ۱ = ۰ سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۲ — اگر کسی معین م ن کو خارج کیا جائے اور وہ س میں سے گذرنے والے وتر خاص کے سرے پر کے مماس سے ق پر ملے تو ثابت کرو کہ ق کا معین فاصلہ س ن کے مساوی ہے۔

۱۳ — معلومہ طول کے ایک خطِ مستقیم کے سرے، دو ثابت خطوط مستقیم و ا، و ب پر ہیں جو علی القوائم ہیں۔ ثابت کرو کہ خط پر کے کسی نقطہ ج کا طریق ایک ناقص ہے جس کے نیم محور علی الترتیب ج ا اور ج ب کے مساوی ہیں۔

۱۴ — ایک ناقص کا کوئی مماس محور اعظم کے سروں پر کے مماسوں سے نقطوں ت، تَ پر منقطع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر ت تَ ہے ماسکوں میں سے گذرے گا۔

[کیونکہ $\frac{لا\,لاَ}{ا^2} + \frac{ما\,ماَ}{ب^2} - ۱ = ۰$، خط لا = ا کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں

ما = $\frac{ب^2}{ماَ}\left(۱ - \frac{لاَ}{ا}\right)$ اور خط لا = -ا کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں ما = $\frac{ب^2}{ماَ}\left(۱ + \frac{لاَ}{ا}\right)$

پس وہ دائرہ جس کا قطر ت تَ ہے

$$(لا - ا)(لا + ا) + \left\{ما - \frac{ب^2}{ماَ}\left(۱ - \frac{لاَ}{ا}\right)\right\}\left\{ما - \frac{ب^2}{ماَ}\left(۱ + \frac{لاَ}{ا}\right)\right\} = ۰$$

ہے جو ما = ۰ کو وہاں قطع کرتا ہے جہاں

لاَ^۲ − ا^۲ + (ب^۲ / ماَ^۲) (۱ − لاَ^۲ / ا^۲) = ۰

یعنے لاَ^۲ − ا^۲ + ب^۲ = ۰ کیونکہ (لاَ، ماَ) ناقص پر ہے۔]

(۵۳ **۱۱۸ — کسی نقطہ سے ایک قطع ناقص کے دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں جو حقیقی، منطبق، یا خیالی ہوں گے بموجب اس کے کہ نقطہ منحنی کے باہر، اس کے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔**

وہ خط جس کی مساوات

ما = م لا + √(ا^۲ م^۲ + ب^۲) ، .... (۱)

ہے ناقص کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ [دفعہ ۱۱۴]۔
خط (۱) مخصوص نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرے گا اگر

ماَ = م لاَ + √(ا^۲ م^۲ + ب^۲)

یعنے اگر (ماَ − م لاَ)^۲ − ا^۲ م^۲ − ب^۲ = ۰

یا م^۲ (لاَ^۲ − ا^۲) − ۲م لاَ ماَ + ماَ^۲ − ب^۲ = ۰ ، ... (۲)

مساوات (۲) م میں ایک دو درجی مساوات ہے اور اس سے ناقص کے ان مماسوں کی سمتیں حاصل ہوتی ہیں جو نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرتے ہیں۔ چونکہ دو درجی مساوات کی اصلیں دو ہوتی ہیں اس لیے دو مماس نقطہ (لاَ، ماَ) میں سے گذریں گے۔

مساوات (۲) کی اصلیں حقیقی، منطبق، یا خیالی ہیں بموجب اس کے کہ

(لاَ^۲ − ا^۲) (ماَ^۲ − ب^۲) − لاَ^۲ ماَ^۲

منفی، صفر، یا مثبت ہو، یا بموجب اس کے کہ $\frac{لاَ^2}{ا^2} + \frac{ماَ^2}{ب^2} - ا$ مثبت، صفر، یا منفی ہو۔ یعنے بموجب اس کے کہ نقطہ (لاَ، ماَ) ناقص کے باہر، اسکے اوپر، یا اس کے اندر ہو۔

۱۱۹ — کسی نقطہ سے ایک ناقص کے دو مماس کھینچے گئے ہیں۔ اِن مماسوں کے نقاطِ تماس کو ملانے والے خط کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ لاَ، ماَ اُس نقطہ کے محدد ہیں جس سے مماس کھینچے گئے ہیں۔
فرض کرو کہ مماسوں کے نقاطِ تماس کے محدد (ھ، ک) اور (ھَ، کَ) ہیں۔
(ھ، ک) اور (ھَ، کَ) پر کے مماسوں کی مساواتیں

$$\frac{لا\,ھ}{ا^2} + \frac{ما\,ک}{ب^2} = ۱،$$

اور

$$\frac{لا\,ھَ}{ا^2} + \frac{ما\,کَ}{ب^2} = ۱$$

ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ (لاَ، ماَ) اِن دونوں مماسوں پر ہے۔

$$\therefore \frac{لاَ\,ھ}{ا^2} + \frac{ماَ\,ک}{ب^2} = ۱، \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور

$$\frac{لاَ\,ھَ}{ا^2} + \frac{ماَ\,کَ}{ب^2} = ۱، \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

لیکن (۱) اور (۲) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ (ھ، ک) اور (ھَ، کَ) دونوں اُس خطِ مستقیم پر ہیں جس کی مساوات

$$\frac{لاَ\,لا}{ا^2} + \frac{ماَ\,ما}{ب^2} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

ہے - پس (۳) اُس خط کی مطلوبہ مساوات ہے جو (لاَ، ماَ) سے کھینچے ہوئے مماسوں کے نقاط تماس کو ملاتا ہے

اگر کسی نقطہ ن سے ایک ناقص کے دو مماس کھینچے جائیں تو اِن مماسوں کے نقاط تماس کو ملانے والے خط کو ناقص کے لحاظ سے نقطہ ن کا قطبی کہا جاتا ہے -

۱۲۰ — اگر ایک ناقص کے لحاظ سے نقطہ ن کا قطبی نقطہ ق میں سے گذرے تو نقطہ ق کا قطبی، ن میں سے گذرے گا -

اِس کو ٹھیک اُسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے جیسا کہ دفعہ ۸۷ میں ثابت کیا گیا تھا -

۱۲۱ — ایک ناقص کے ایسے دو مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرنا جو باہم علی القوائم ہوں -

وہ خط جس کی مساوات

$$\text{ما} = \text{م لا} + \sqrt{\text{ا}^{2}\,\text{م}^{2} + \text{ب}^{2}} \quad \text{،} \ldots\ldots (١)$$

ہے ناقص کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو -

اگر ہم لا اور ما کو معلومہ فرض کریں تو اِس مساوات سے اُن مماسوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو نقطہ (لا، ما) میں سے گذرتے ہیں -

اِس مساوات کو منطبق بنانے پر وہ (۱۵۵)

$$\text{م}^{2}(\text{لا}^{2} - \text{ا}^{2}) - ٢\,\text{م لا ما} + \text{ما}^{2} - \text{ب}^{2} = ٠ \quad \text{،} \ldots\ldots (٢)$$

ہو جاتی ہے -

فرض کرو کہ (۲) کی اصلیں $\text{م}_{١}$ اور $\text{م}_{٢}$ ہیں، تب اگر مماس علی القوائم ہیں تو $\text{م}_{١}\,\text{م}_{٢} = -١$ اور اس لیے

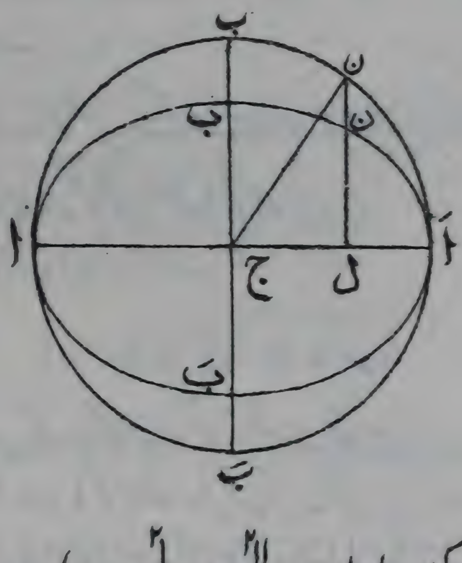
$$\frac{\text{ما}^{2} - \text{ب}^{2}}{\text{لا}^{2} - \text{ا}^{2}} = -1$$

یا $\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} = \text{ا}^{2} + \text{ب}^{2}$ ، .... (۳)

اس لیے مطلوبہ طریق ایک دائرہ ہے۔

اِس دائرہ کو ناقص کا مرتب دائرہ کہتے ہیں۔

۱۲۲ — وہ دائرہ جو ایک ناقص کے محور اعظم پر اس کو قطر مان کر کھینچا گیا ہو امدادی دائرہ کہلاتا ہے۔



اگر ناقص کی مساوات $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$ ، .... (۱)

ہو تو امدادی دائرہ کی مساوات $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ا}^{2}} = 1$ ، .... (۲)

ہو گی۔

اِس لیے اگر ناقص کے کسی معین ن ل کو خارج کیا جائے اور (۱۵٦)
وہ امدادی دائرہ سے نَ پر ملے تو (۱) اور (۲) سے

$$\frac{\text{ل ن}^2}{\text{ب}^2} = 1 - \frac{\text{ج ل}^2}{\text{ا}^2} = \frac{\text{ل ن}^2}{\text{ا}^2}$$

$$\therefore \frac{\text{ل ن}}{\text{ل ن}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

پس ناقص کے اور دائرہ کے معین ایک دوسرے کے ساتھ مستقل نسبت رکھتے ہیں۔

زاویہ ا ج ن کو نقطہ ن کا خارج المرکز زاویہ کہتے ہیں۔ الدائی دائرہ کے نقطہ ن کو ناقص کے نقطہ ن کا جواب کہتے ہیں۔

اگر زاویہ ا ج ن، فہ ہو تو ن کے محدد ا جم فہ، ا جب فہ ہوں گے اور ن کے محدد ا جم فہ، ب جب فہ ہوں گے۔

۱۲۳ ـــ دو نقطوں کے خارج المرکز زاویے دئے گئے ہیں۔ ان کو ملانے والے خط کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ان دو نقطوں کے خارج المرکز زاویے طہ_1، طہ_2 ہیں تب ان کے محدد علی الترتیب ا جم طہ_1، ب جب طہ_1 اور ا جم طہ_2، ب جب طہ_2 ہیں۔

پس ان کو ملانے والے خط کی مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & 1 \\ \text{ا جم طہ}_1 & \text{ب جب طہ}_1 & 1 \\ \text{ا جم طہ}_2 & \text{ب جب طہ}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad [\text{دفعہ ۲۴}]$$

ہے۔

$$\therefore \frac{\text{لا}}{\text{ا}}(\text{جب طہ}_1 - \text{جب طہ}_2) + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}(\text{جم طہ}_2 - \text{جم طہ}_1) - \text{جب}(\text{طہ}_1 - \text{طہ}_2) = 0$$

اس کو جب $\frac{1}{2}(\text{طہ}_1 - \text{طہ}_2)$ سے تقسیم کرنے پر مساوات

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{طہ}_1+\text{طہ}_2)+\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{طہ}_1+\text{طہ}_2)=\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{طہ}_1-\text{طہ}_2)\,\text{،}\ldots(1)$$

حاصل ہوتی ہے جو مطلوبہ مساوات ہے ۔

طہ$_1$ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مساوات (۱) میں طہ$_2$ = طہ$_1$ رکھنا ہوگا چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم طہ}_1+\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب طہ}_1=1\,\text{،}\ldots\ldots\ldots(2)$$

۱۲۴ ـ دفعہ سابق کی مساوات (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک ناقص پر دو نقطوں کے خارج المرکز زاویوں کا مجموعہ مستقل ہو اور ۲ عہ کے مساوی ہو تو اِن نقطوں کو ملانے والا وتر ہمیشہ خط (۱۵۷)

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم عہ}+\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب عہ}=1$$

کے متوازی ہوتا ہے ـ یعنے وتر ہمیشہ اُس نقطہ پر کے مماس کے متوازی ہوتا ہے جس کا خارج المرکز زاویہ عہ ہے ۔

اس کے بالعکس ایک ناقص کے متوازی وتروں کے نظام کے لیے کسی وتر کے سروں کے خارج المرکز زاویوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے ۔

۱۲۵ ـ ایک ناقص کے کسی نقطہ پر کے عماد کی مساوات اِس نقطہ کے خارج المرکز زاویہ کی رقوم میں معلوم کرنا ـ

فرض کرو کہ ناقص کے نقطہ ن کا خارج المرکز زاویہ طہ ہے ـ ن پر کے مماس کی مساوات (دفعہ ۱۲۳)

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم طہ}+\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب طہ}=1$$

ہے۔ اُس خط کی مساوات جو نقطہ (ا جم طہ، ب جیب طہ) میں سے گذرتا ہے اور مماس پر عمود ہے [دفعہ ۳۰ کی بموجب]

$$(\text{لا} - \text{ا جم طہ})\frac{\text{ا}}{\text{جم طہ}} - (\text{ما} - \text{ب جیب طہ})\frac{\text{ب}}{\text{جیب طہ}} = ۰ \text{،}$$

یا
$$\frac{\text{ا لا}}{\text{جم طہ}} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جیب طہ}} = \text{ا}^۲ - \text{ب}^۲$$

ہے۔

اگر طہ۱، طہ۲ پر کے مماسوں کا نقطہ تقاطع (لاَ، ماَ) ہو تو

$$\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}}\,\text{جم طہ}_۱ + \frac{\text{ماَ}}{\text{ب}}\,\text{جیب طہ}_۱ = ۱ \text{،}$$

اور
$$\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}}\,\text{جم طہ}_۲ + \frac{\text{ماَ}}{\text{ب}}\,\text{جیب طہ}_۲ = ۱ \text{،}$$

پس
$$\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}} = \frac{\text{جیب طہ}_۲ - \text{جیب طہ}_۱}{\text{جیب}\,(\text{طہ}_۲ - \text{طہ}_۱)} = \frac{\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}(\text{طہ}_۱ + \text{طہ}_۲)}{\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}(\text{طہ}_۱ - \text{طہ}_۲)}$$

اور
$$\frac{\text{ماَ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جم طہ}_۱ - \text{جم طہ}_۲}{\text{جیب}\,(\text{طہ}_۲ - \text{طہ}_۱)} = \frac{\tfrac{۱}{۲}\,\text{جیب}\,\tfrac{۱}{۲}(\text{طہ}_۱ + \text{طہ}_۲)}{\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}(\text{طہ}_۱ - \text{طہ}_۲)}$$

[یا چونکہ وتر (طہ۱، طہ۲) نقطہ (لاَ، ماَ) کا قطبی ہے اس لیے دفعہ ۱۲۳ کی مساوات (۱) وہی ہے جو

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^۲} - ۱ = ۰$$

ہے۔ پس اوپر کا نتیجہ فوراً لکھ لیا جا سکتا ہے]

(۱۵۸) طہ۱، طہ۲ پر کے عمادوں کے نقطہ تقاطع کے محدد

$$\text{لا} = \frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا}} \times \frac{\text{جم ط}_1 \text{ جم ط}_2 \text{ جم } \frac{1}{2}(\text{ط}_1 + \text{ط}_2)}{\text{جم } \frac{1}{2}(\text{ط}_1 - \text{ط}_2)}$$

$$\text{ما} = \frac{\text{ب}^2 - \text{ا}^2}{\text{ب}} \times \frac{\text{جب ط}_1 \text{ جب ط}_2 \text{ جب } \frac{1}{2}(\text{ط}_1 + \text{ط}_2)}{\text{جم } \frac{1}{2}(\text{ط}_1 - \text{ط}_2)}$$

حاصل ہوں گے۔

مثال — متوازی وتروں کے ایک نظام کے سروں پر کے عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرنا۔

چونکہ $\text{ط}_1 + \text{ط}_2 =$ مستقل $= ۲\text{عہ}$ (فرض کرو)

اس لیے اوپر کی مساواتوں سے

$$\frac{\text{ا لا}}{\text{جم عہ}} + \frac{\text{ب ما}}{\text{جب عہ}} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\frac{\text{جم ۲عہ}}{\text{جم } \frac{1}{2}(\text{ط}_1 - \text{ط}_2)} \quad \text{،} \ldots\ldots (1)$$

اور
$$\frac{\text{ا لا}}{\text{جم عہ}} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب عہ}} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\frac{\text{جم}(\text{ط}_1 - \text{ط}_2)}{\text{جم } \frac{1}{2}(\text{ط}_1 - \text{ط}_2)}$$

$$= (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\left\{۲\text{جم } \frac{1}{2}(\text{ط}_1 - \text{ط}_2) - \frac{1}{\text{جم } \frac{1}{2}(\text{ط}_1 - \text{ط}_2)}\right\}$$

پہلی مساوات سے $\text{جم } \frac{1}{2}(\text{ط}_1 - \text{ط}_2)$ کی بجائے اندراج کرو تو کچھ اختصار کے بعد مساوات

$$\text{ا}^2\text{لا}^2 + ۲\text{ا ب لا ما قم ۲عہ} + \text{ب}^2\text{ما}^2 = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^2 \text{جم}^2 \text{۲عہ}$$

حاصل ہوگی۔

۱۲۶ — اب ہم ناقص کے بعض ہندسی خواص ثابت کرینگے۔

فرض کرو کہ ن پر کا مماس محوروں لا اور ما سے علی الترتیب نقطوں ت، ت پر ملتا ہے۔

اور فرض کرو کہ عماد محوروں سے نقطوں گ، گَ پر ملتا ہے۔ ن پر کے عماد پر س سے، سَ سے، ج ک عمود کھینچو۔ نیز ج ع کو ن پر کے مماس کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ عماد سے ف پر ملتا ہے اور ما کی فاصلہ س ن سے ع پر ملتا ہے۔

تب اگر نقطہ ن کے محدد لاَ، ماَ ہوں تو ن پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2} = 1 \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ہوگی۔ یہ مماس محور لا کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں ما = ۰۔ اور اس نقطہ پر (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ج ل} \times \text{ج ت}}{\text{ج ا}^2} = 1 \text{، یا } \text{ج ل} \times \text{ج ت} = \text{ج ا}^2 \text{،} \quad \ldots \quad (\text{عہ})$$

اسی طرح $\text{ل ن} \times \text{ج ت} = \text{ج ب}^2 \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{بہ})$

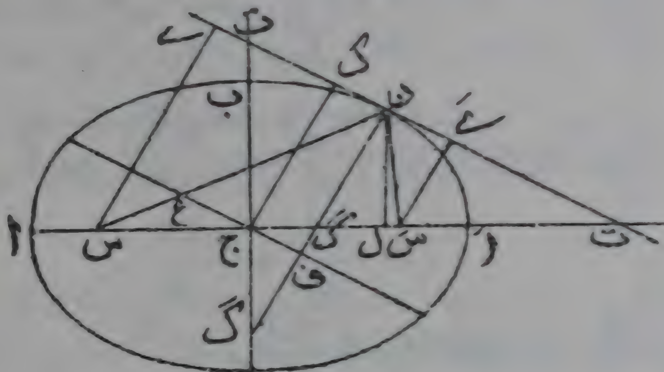
(۱۵۹) ن پر کے عماد کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - \text{لاَ}}{\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}^2}} = \frac{\text{ما} - \text{ماَ}}{\frac{\text{ماَ}}{\text{ب}^2}} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ہے۔ یہ عماد محور لا کو جہاں قطع کرتا ہے وہاں ما = ۰۔ اور اس لیے (۲) سے

$$\text{لا} - \text{لاَ} = -\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\,\text{لاَ} \text{، یا } \text{لا} = \text{لاَ}\left(1 - \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\right) = \text{ز}^2 \times \text{لاَ}$$

$$\therefore \quad \text{ج گ} = \text{ز}^2 \times \text{ج ل} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{جہ})$$



نیز چونکہ

س گ = س ج + ج گ = ا ز + ز^{۲} لاَ ، اور گ سَ = ا ز - ز^{۲} لاَ

$$\therefore \quad \frac{\text{س گ}}{\text{گ سَ}} = \frac{\text{ا ز + ز}^{۲}\text{ لاَ}}{\text{ا ز - ز}^{۲}\text{ لاَ}} = \frac{\text{ا + ز لاَ}}{\text{ا - ز لاَ}} = \frac{\text{س ن}}{\text{سَ ن}}$$

اِس لیے ن گ ، زاویہ س ن سَ کی تنصیف کرتا ہے ،... (ضہ)

پھر چونکہ ن گ^{۲} = گ ل^{۲} + ل ن^{۲} = (ج ل - ج گ)^{۲} + ل ن^{۲}

$$\therefore \quad \text{ن گ}^{۲} = \text{ماَ}^{۲} + \text{لاَ}^{۲} \left(\text{ا - ز}^{۲}\right)^{۲}$$

$$\text{یا} \qquad \text{ن گ} = \text{ب}^{۲} \sqrt{\frac{\text{ماَ}^{۲}}{\text{ب}^{۴}} + \frac{\text{لاَ}^{۲}}{\text{ب}^{۴}}}$$

$$\text{اسی طرح} \qquad \text{ن گ} = \text{ز}^{۲} \sqrt{\frac{\text{لاَ}^{۲}}{\text{ا}^{۴}} + \frac{\text{ماَ}^{۲}}{\text{ب}^{۴}}}$$

$$\text{اور} \qquad \text{ن ف} = \text{ک ج} = \frac{۱}{\left(\frac{\text{لاَ}^{۲}}{\text{ا}^{۴}} + \frac{\text{ماَ}^{۲}}{\text{ب}^{۴}}\right)^{\frac{۱}{۲}}} \qquad \text{(دفعہ ۱۳)}$$

∴ ن ف × ن گ = ب^2، اور ن ف × ن گ = ا^2، ....(صہ)

وہ خط جس کی مساوات

$$\text{ما} = \text{م لا} + \sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2}\text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۳})$$

ہے ناقص کو مس کرے گا خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو۔ پس اگر اس خط پر ماسکوں سے عمود س ے، سَ ےَ کھینچے جائیں تو [دفعہ ۳۱]

$$\text{س ے} = \frac{-\text{م ا ز} + \sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2}}{\sqrt{\text{۱} + \text{م}^2}} \quad \text{اور} \quad \text{سَ ےَ} = \frac{\text{م ا ز} + \sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2}}{\sqrt{\text{۱} + \text{م}^2}}$$

$$\therefore \text{س ے} \times \text{سَ ےَ} = \frac{\text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2 - \text{م}^2\text{ا}^2\text{ز}^2}{\text{۱} + \text{م}^2}\text{،} \quad \ldots\ldots (\text{طہ})$$

پھر اس خط کی مساوات جو س میں سے گذرتا ہے اور (۳) پر عمود ہے

$$\text{م ما} + \text{لا} + \text{ا ز} = \text{۰}\text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۴})$$

ہے۔

(۳) اور (۴) کے نقطہ تقاطع ے کا طریق معلوم کرنے کے لیے م کو اِن دو مساواتوں سے ساقط کرنا چاہیئے۔ یہ مساواتیں شکل

$$\text{ما} - \text{م لا} = \sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2} \quad \text{اور} \quad \text{م ما} + \text{لا} = -\text{ا ز}$$

میں لکھی جا سکتی ہیں۔ اِن مساواتوں کی طرفین کا مربع لیکر جمع کرو تو حاصل ہوگا

$$(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)(\text{۱} + \text{م}^2) = \text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2 + \text{ا}^2\text{ز}^2 = \text{ا}^2(\text{۱} + \text{م}^2)$$

اِس لیے ے کا طریق امدادی دائرہ ہے جس کی مساوات

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2\text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{ظہ})$$

ہے۔

ہمیں یہی نتیجہ حاصل ہوتا اگر ہم یہ فرض کرتے کہ سَ سے عمود کھینچا گیا ہے۔

۱۲۷ — فرض کرو کہ ن کوئی نقطہ ہے اور فرض کرو کہ ن کا قطبی ق قَ ہے۔ فرض کرو کہ ق قَ محوروں سے ت، تَ پر ملتا ہے۔ س سے، سَ سے، ج سے، ج ک، اور ن و کو ق قَ پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ ن و محوروں سے گ، گَ پر ملتا ہے۔ تب اگر ن کے محدد لاَ، ماَ ہوں تو ق قَ کی مساوات [دفعہ ۱۱۹]

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2} = 1 \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ہوگی۔ اس لیے ن و گ کی مساوات [دفعہ ۱۳۰] (۱۶۱)

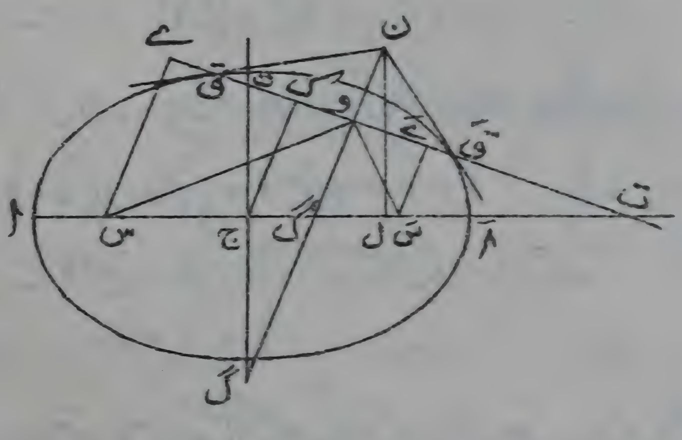
$$\frac{\text{لا} - \text{لاَ}}{\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}^2}} = \frac{\text{ما} - \text{ماَ}}{\frac{\text{ماَ}}{\text{ب}^2}} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ہوگی۔

(۱) اور (۲) سے پچھلی دفعہ کی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

(ع) ج ل × ج ت = ج ا²، (ی) ل ن × ج تَ = ج ب²

(ج) ج گ = ز² × ج ل اور (ض) ک ج × ن گ = ب²



مثالیں

۱ — ثابت کرو کہ ایک ناقص کا ماسکہ، متناظر مرتب کا قطب ہوتا ہے۔
۲ — ثابت کرو کہ اگر ایک ناقص کے ایک مماس پر مرکز سے عمود گرایا جائے تو عمود کے پائین کے طریق کی مساوات $ر^{2} = ا^{2}$ جم^{2} طہ + ب^{2} جب^{2} طہ ہوگی۔
۳ — ثابت کرو کہ ایک ناقص کے کوئی دو قطر جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں لیے جائیں تو اِن کے مربعوں کے مکافیوں کا مجموعہ مستقل ہوگا۔
[دیکھو دفعہ ۱۱۲]۔
۴ — اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث کو ایک ناقص میں بنایا جائے تو ثابت کرو کہ ضلعوں کے متوازی قطروں کے مربعوں کے مکافیوں کا مجموعہ مستقل ہوگا۔
۵ — ایک ناقص دو خطوط مستقیم کے درمیان جو باہم علی القوائم ہیں پھسلتا (۱۶۲)
ہے۔ ثابت کرو کہ اِس کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔ [دیکھو دفعہ ۱۲۱]
۶ — اگر ایک ناقص کے محور اصغر پر دو ایسے نقطے سَ، ھَ لیے جائیں کہ سَ ج = ج ھَ = ج س جہاں ج مرکز اور س ماسکہ ہے تو ثابت کرو کہ ناقص کے کسی مماس پر سَ اور ھَ سے عمودوں کا مجموعہ مستقل ہے۔
۷ — ایک ناقص کے دو نقطوں کے خارج المرکز زاویوں کا فرق مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ اِن نقطوں پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ناقص ہے۔

[اگر فہ + عہ اور فہ - عہ پر کے مماس (لاَ، ماَ) پر ملیں تو $\frac{لاَ}{ا}$ = جم فہ قط عہ،

$\frac{ماَ}{ب}$ = جب فہ قط عہ۔ طریق حاصل کرنے کے لیے فہ کو ساقط کرو۔]

۸ — ایک نقطہ ن کا قطبی محور اصغر کو ت پر قطع کرتا ہے اور ن سے قطبی پر کا عمود قطبی کو و پر قطع کرتا ہے اور محور اصغر کو گ پر۔ ثابت کرو کہ ت، و، گ میں سے گذرنے والا دائرہ ماسکوں میں سے گذرے گا۔

[ثابت کرو کہ ت ج × ج گ = س ج × ج سَ]

۹— ثابت کرو کہ خط ل لا + م ما + ن = ۰، منحنی

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$$

کا عماد ہے اگر $\frac{ا^2}{ل^2} + \frac{ب^2}{م^2} = \frac{(ا^2 - ب^2)^2}{ن^2}$

[$\frac{ا\,لا}{جم\,ط} - \frac{ب\,ما}{جب\,ط} = ا^2 - ب^2$ کے ساتھ مقابلہ کرو تو $\frac{ل\,جم\,ط}{ا} = \frac{م\,جب\,ط}{ب}$

$= \frac{ن}{ا^2 - ب^2}$، پھر ط کو ساقط کرو۔]

۱۰— ایک ناقص کے ماسکہ سے (جس کا مرکز ج ہے) کسی نقطہ ن کے قطبی پر عمود ڈالا جائے تو یہ عمود خط ج ن سے مرتب پر ملیگا۔

۱۱— اگر ایک ناقص کے نقطہ ن کے جواب میں امدادی دائرہ پر نقطہ ق ہو تو ثابت کرو کہ ماسکوں س، ھ کے عمودی فاصلے، ق پر کے عماد سے علی الترتیب س ن اور ھ ن کے مساوی ہوں گے۔

۱۲— اگر ایک ناقص کے نقطہ ن کے جواب میں امدادی دائرہ پر نقطہ ق ہو تو ثابت کرو کہ ن اور ق پر کے عماد ایک ثابت دائرہ پر ملتے ہیں۔

۱۳— ثابت کرو کہ ایک ناقص میں بنائے ہوئے مثلث کا رقبہ

$$\frac{1}{2}\,ا\,ب \left\{ جب\,(بہ - جہ) + جب\,(جہ - عہ) + جب\,(عہ - بہ) \right\}$$

$$= -2\,ا\,ب\,جب\,\tfrac{1}{2}(بہ - جہ)\,جب\,\tfrac{1}{2}(جہ - عہ)\,جب\,\tfrac{1}{2}(عہ - بہ)$$

ہے جہاں عہ، بہ، جہ، مثلث کے راسوں کے خارج المرکز زاویے ہیں۔

۱۲۸— ایک ناقص کے متوازی وتروں کے نظام کے نقاطِ وسطی کا طریق معلوم کرنا۔ (۱۶۳

اُس وتر کی مساوات جو نقطوں طہ_1 اور طہ_2 کو ملاتا ہے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{طہ}_1+\text{طہ}_2)+\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{طہ}_1+\text{طہ}_2)=\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{طہ}_1-\text{طہ}_2)$$

ہے۔ اگر یہ وتر، $\text{ما}-\text{م}\,\text{لا}=0$ کے متوازی ہے تو

$$\text{م}=-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{مم}\,\frac{1}{2}(\text{طہ}_1+\text{طہ}_2)\text{،}\quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

لیکن اگر وتر کا نقطہ وسطی (لا، ما) ہے تو

$$2\,\text{لا}=\text{ا}(\text{جم}\,\text{طہ}_1+\text{جب}\,\text{طہ}_2)=2\,\text{ا}\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{طہ}_1+\text{طہ}_2)\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{طہ}_1-\text{طہ}_2)$$

اور $$2\,\text{ما}=\text{ب}(\text{جب}\,\text{طہ}_1+\text{جب}\,\text{طہ}_2)=2\,\text{ب}\,\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{طہ}_1+\text{طہ}_2)\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{طہ}_1-\text{طہ}_2)$$

پس $$\frac{\text{ما}}{\text{لا}}=\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{مس}\,\frac{1}{2}(\text{طہ}_1+\text{طہ}_2)$$

$$=-\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2\,\text{م}}\text{،}\quad(1)\ \text{سے}$$

اِس لیے اُن تمام وتروں کے نقاط وسطی کا طریق جو خط $\text{ما}=\text{م}\,\text{لا}$ کے متوازی ہیں وہ خطِ مستقیم ہے جس کی مساوات

$$\text{ما}=-\frac{\text{ب}^2\,\text{لا}}{\text{ا}^2\,\text{م}}\text{،}\quad\ldots\ldots\ldots(2)$$

ہے۔

(۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ناقص کے تمام قطر (دفعہ ۱۰۲، تعریف) مرکز میں سے گذرتے ہیں۔

مساوات (۲) کو شکل $\text{ما}=\text{مَ}\,\text{لا}$ میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{م}\,\text{مَ}=-\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\text{،}\quad\ldots\ldots\ldots(3)$$

رشتہ (۳) کے تشاکل سے یہ ظاہر ہے کہ وہ تمام وتر جو ما = مَ لا کے متوازی ہیں خط ما = م لا سے تنصیف ہوتے ہیں۔

پس اگر ناقص کا ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے تو یہ دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے گا۔

تعریف: دو قطر مزدوج کہلاتے ہیں جبکہ ہر ایک، دوسرے کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے۔

۱۲۹ ـ کسی قطر کے ایک سرے پر کا مماس اُن وتروں کے متوازی ہوتا ہے جو اِس قطر سے تنصیف ہوتے ہیں۔ (۱۶۴)

متوازی وتروں کے نظام کے تمام نقاط وسطی ایک قطر پر ہوتے ہیں۔ اِس لیے متوازی مماسوں پر یعنے اُن متوازی وتروں پر جو ناقص کو منطبق نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔ غور کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ متوازی وتروں کے نظام کے نقاط وسطی کا قطر اُن مماسوں کے نقاط تماس میں سے گذرتا ہے جو وتروں کے متوازی ہیں۔

مثال ۱۔ ناقص کے ایک قطر کے کسی نقطہ کا قطبی مزدوج قطر کے متوازی ہوتا ہے۔

کیونکہ (لاَ، ماَ) میں سے گذرنے والا قطر

$$\text{لا ماَ} - \text{ما لاَ} = ۰$$

اور (لاَ، ماَ) کا قطبی

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^۲} - ۱ = ۰$$

ہے۔ یہ مساواتیں شرط $\text{م}\,\text{مَ} = -\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$ کو پورا کرتی ہیں کیونکہ

$$\text{م} = \frac{\text{مَا}}{\text{لاَ}} \quad \text{اور} \quad \text{مَ} = -\frac{\text{ب}^2\,\text{لاَ}}{\text{ا}^2\,\text{مَا}}$$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ناقص کے ایک وتر کا وسطی نقطہ (لاَ، مَا) ہے تو

یہ وتر، نقطہ (لاَ، مَا) کے قطبی کے متوازی ہے۔

اس لیے اُس وتر کی مساوات جس کا نقطہ وسطی (لاَ، مَا) ہے

$$(\text{لا} - \text{لاَ})\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}^2} + (\text{ما} - \text{مَا})\frac{\text{مَا}}{\text{ب}^2} = ۰$$

ہے۔

مثال ۲۔ اگر ایک ناقص کے وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گذریں تو اِن کے نقاط وسطی دوسرے ناقص پر ہوں گے۔

وہ وتر جس کا نقطہ وسطی (لاَ، مَا) ہے

$$(\text{لا} - \text{لاَ})\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}^2} + (\text{ما} - \text{مَا})\frac{\text{مَا}}{\text{ب}^2} = ۰،$$ [مثال (۱)]

ہے۔ اگر یہ وتر نقطہ (ھ، ک) میں سے گذرے تو

$$(\text{ھ} - \text{لاَ})\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}^2} + (\text{ک} - \text{مَا})\frac{\text{مَا}}{\text{ب}^2} = ۰$$

اور اس طرح نقطہ (لاَ، مَا)، ناقص

$$\frac{\text{لاَ}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{مَا}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ھ}\,\text{لا}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ک}\,\text{ما}}{\text{ب}^2} = ۰$$

پر ہے۔

مثال ۳۔ ناقص پر کے اُن دو نقطوں کو ملانے والا خط جنکے

خارج المرکز زاویوں کا فرق مستقل ہو وہ سرے ناقص کو لف کرتا ہے۔

نقطوں ط_1 اور ط_2 کو ملانے والے خط کی مساوات جبکہ $\text{ط}_1 - \text{ط}_2 = 2\,\text{عہ}$ حسب ذیل ہے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\ \text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{ط}_1+\text{ط}_2) + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\ \text{جب}\ \frac{1}{2}(\text{ط}_1+\text{ط}_2) = \text{جم عہ}$$

اِس خط کا لفاف، $(\text{ط}_1 + \text{ط}_2)$ کی مختلف قیمتوں کے لیے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = \text{جم}^2\,\text{عہ}، \qquad [\text{مثال ۲ صفحہ}\quad]$$

ہے۔

مثال ۴۔ اگر ایک ناقص میں ایک مثلث بنایا جائے اور اِس کے دو اضلاع معلومہ خطوطِ مستقیم کے متوازی ہوں تو تیسرے ضلع کا لفاف ایک دوسرا ناقص ہوگا۔

فرض کرو کہ ف، ق، ر کے خارج المرکز زاویے ط_1، ط_2، ط_3 ہیں۔ ۱۶)
تب اگر ف ق اور ف ر، معلومہ خطوں کے متوازی ہوں تو

$$\text{ط}_1 + \text{ط}_2 = \text{مستقل} = 2\,\text{عہ}، \quad \text{اور}\quad \text{ط}_1 + \text{ط}_3 = \text{مستقل} = 2\,\text{بہ}$$

$$\text{پس}\qquad \text{ط}_2 - \text{ط}_3 = 2\,(\text{عہ} - \text{بہ})$$

اس لیے، بموجب مثال ۲، ق ر کا لفاف

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = \text{جم}^2\,(\text{عہ} - \text{بہ})$$

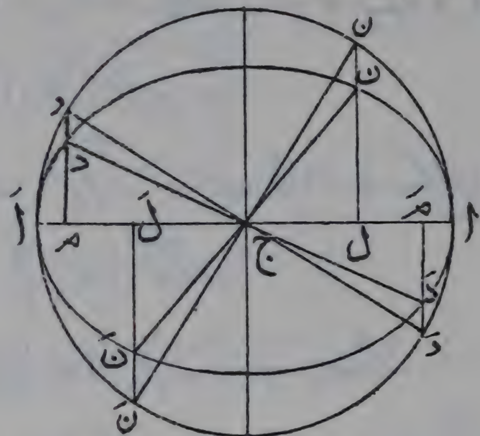
ہے۔

۱۳۰ — فرض کرو کہ مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سرے ن، د ہیں۔ فرض کرو کہ ن کے محدد $\text{لا}'$، $\text{ما}'$ اور د کے محدد $\text{لا}''$، $\text{ما}''$ ہیں۔ ج ن اور ج د کی مساواتیں

$$\frac{\text{ما}}{\text{ماَ}} = \frac{\text{لا}}{\text{لاَ}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ما}}{\text{ماً}} = \frac{\text{لا}}{\text{لاً}}$$

ہیں، اس لیے دفعہ ۱۲۸ (۵) کی رو سے $\frac{\text{ماَ ماً}}{\text{لاَ لاً}} = -\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$

$$\therefore \quad \frac{\text{لاَ لاً}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ماَ ماً}}{\text{ب}^2} = 0 \text{ ،} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$



اگر ن اور د کے خارج المرکز زاویے فہ، فہَ ہوں تو لاَ = ا جم فہ، ماَ = ب جب فہ، لاً = ا جم فہَ، ماً = ب جب فہَ - اِن قیمتوں کو (۱) میں درج کرنے سے

$$\text{جم فہ جم فہَ} + \text{جب فہ جب فہَ} = 0$$

یا

$$\text{فہ} \sim \text{فہَ} = \frac{\pi}{2}$$

(۱۶۶) پس ایک ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سِروں پر کے نقطوں کے خارج المرکز زاویوں کا فرق ایک قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

اگر ناقص کے قطروں ن ج نَ اور د ج دَ کے جواب میں امدادی دائرہ کے قطر ن ج نَ، د ج دَ ہوں تو ن ج نَ اور د ج دَ

باہم علی القوائم ہوں گے۔ اِس لیے د اور دَ کے محددوں کو فوراً نَ یا نَ کے محددوں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

۱۳۱ ـــ ثابت کرو کہ دو مزدوج نیم قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سرے ن، د ہیں۔ فرض کرو کہ ن کا خارج المرکز زاویہ فہ ہے تو د کا خارج المرکز زاویہ فہ ± $\frac{\pi}{2}$ ہوگا (دفعہ ۱۳۰)۔

ن کے محدد ا جم فہ، ب جب فہ اور د کے محدد ا جم (فہ ± $\frac{\pi}{2}$)، ب جب (فہ ± $\frac{\pi}{2}$) ہوں گے۔

∴ ج ن^2 = ا^2 جم^2 فہ + ب^2 جب^2 فہ

اور ج د^2 = ا^2 جم^2 (فہ ± $\frac{\pi}{2}$) + ب^2 جب^2 (فہ ± $\frac{\pi}{2}$)

∴ ج ن^2 + ج د^2 = ا^2 + ب^2

۱۳۲ ـــ اُس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ایک ناقص کو مزدوج قطروں کے سروں پر مس کرے مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مزدوج قطر ن ج نَ، د ج دَ ہیں۔ اُس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ناقص کو ن، نَ، د، دَ پر مس کرتا ہے ۴ ج ن × ج د جب ن ج د یا ۴ ج د × ج ف ہے جہاں ج ف، ج سے ن پر کے مماس پر عمود ہے۔

اب اگر ن کا خارج المرکز زاویہ فہ ہو تو د کا خارج المرکز زاویہ فہ ± $\frac{\pi}{2}$ ہوگا۔

$$\therefore\ \text{ج د}'^{\,۲} = \text{ا}^{۲}\,\text{جم}^{۲}\left(\text{فہ} \pm \frac{\pi}{۲}\right) + \text{ب}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\left(\text{فہ} \pm \frac{\pi}{۲}\right)$$

$$\text{یا}\quad \text{ج د}'^{\,۲} = \text{ا}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{فہ} + \text{ب}^{۲}\,\text{جم}^{۲}\,\text{فہ}\text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

ن پر کے مماس کی مساوات (دفعہ ۱۲۳) (۱۲۷)

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم فہ} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب فہ} = ۱$$

ہے۔ اِس لیے

$$\text{ج ف}^{۲} = \frac{۱}{\dfrac{\text{جم}^{۲}\,\text{فہ}}{\text{ا}^{۲}} + \dfrac{\text{جب}^{۲}\,\text{فہ}}{\text{ب}^{۲}}}$$

$$\text{یا}\quad \text{ج ف}^{۲} = \frac{\text{ا}^{۲}\,\text{ب}^{۲}}{\text{ا}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{فہ} + \text{ب}^{۲}\,\text{جم}^{۲}\,\text{فہ}}\text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہے۔

(۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ متوازی الاضلاع کا رقبہ ۴ ا ب کے مساوی ہے۔

۱۳۳ — اگر مزدوج نیم قطروں کے ایک زوج کے طول ر، رَ اور اِن کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو

ر رَ جب طہ = ا ب [دفعہ ۱۳۲]

اس لیے جب طہ کم سے کم ہوتا ہے جبکہ ر رَ بڑے سے بڑا ہو۔

اب دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے، اس لیے اِن کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ قطر ایک دوسرے کے مساوی ہوں۔

پس دو مزدوج قطروں کا درمیانی حادہ زاویہ کم سے کم ہوتا ہے جبکہ مزدوج قطر باہم مساوی ہوں۔

۱۳۴ — فرض کرو کہ دو مزدوج قطروں کے سِروں ن، د کے خارج المرکز زاویے فہ، فہ $\pm \frac{\pi}{۲}$ ہیں۔

تب $ج نَ^2 = ا^2 جم^2 فہ + ب^2 جب^2 فہ$

اور $ج دَ^2 = ا^2 جب^2 فہ + ب^2 جم^2 فہ$

$\therefore$ $ج نَ^2 - ج دَ^2 = (ا^2 - ب^2) جم^2 فہ$

پس $ج نَ = ج دَ$ جبکہ $فہ = \frac{\pi}{4}$ یا $\frac{3\pi}{4}$

اس لیے مساوی مزدوج قطروں کی مساواتیں

$$\frac{لا}{ا} = \pm \frac{ی}{ب}$$

ہیں ۔

(۱۶) پس ایک ناقص کے مساوی مزدوج قطر، اُس مستطیل کے وتروں پر سمتوں میں منطبق ہوتے ہیں جو ناقص کے محوروں کے سِروں پر کے مماسوں سے بنتا ہے ۔

۱۳۵ — تعریف ۔ وہ دو خطوطِ مستقیم جو ایک ناقص پر کے کسی نقطہ سے کسی قطر کے سِروں تک کھینچے جائیں تکمیلی وتر کہلاتے ہیں ۔

فرض کرو کہ ناقص کے نقطہ ق کو قطر ن ج نَ کے سِروں ن، نَ سے ملا کر تکمیلی وتر حاصل کئے گئے ہیں ۔ فرض کرو کہ ق ن کا نقطہ وسطی ط ہے اور ق نَ کا طَ ۔ تب ج طَ اور ج ط مزدوج ہیں کیونکہ ہر ایک، دوسرے کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے، اور ج طَ اور ج ط علی الترتیب ق ن اور ق نَ کے متوازی ہیں ۔

پس ق ن اور ق نَ، مزدوج قطروں کے ایک زوج کے متوازی ہیں ۔

۱۳۶ — ہم دائری نقطے ۔ مساوات

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} - ۱ + \text{ل}\,(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + ۲\,\text{گ لا} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج}) = ۰ \quad \ldots (۱)$$

ایک ایسے منحنی کو تعبیر کرتی ہے جو ناقص

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = ۱$$

اور دائرہ $\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + ۲\,\text{گ لا} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج} = ۰$

کے مشترک نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

اب (۱) سے دو خطوطِ مستقیم تعبیر ہوں گے اگر ل کو ٹھیک طور پر منتخب کیا جائے اور دفعہ ۲۳۷ میں معلومہ شرط پوری ہو۔ نیز جب (۱) سے دو خطوطِ مستقیم تعبیر ہوتے ہیں تو وہ خطوط

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} + (\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2}) = ۰$$

کے متوازی ہوں گے اور اس لیے وہ شکل ما = ± م لا کے خطوطِ مستقیم کے متوازی ہوں گے۔

پس ایک ناقص اور کسی دائرہ کے نقاط تقاطع میں سے گذرنیوالے دو خطوطِ مستقیم محوروں کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

اب فرض کرو کہ ایک دائرہ ایک ناقص کو اُن نقطوں پر قطع کرتا ہے جن کے خارج المرکز زاویے عہ، بہ، جہ، ضہ ہیں۔ تب یہ دو خطوط (۱۶۹)

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم}\,\frac{۱}{۲}(\text{عہ} + \text{بہ}) + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب}\,\frac{۱}{۲}(\text{عہ} + \text{بہ}) = \text{جم}\,\frac{۱}{۲}(\text{عہ} - \text{بہ})$$

اور $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم}\,\frac{۱}{۲}(\text{جہ} + \text{ضہ}) + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب}\,\frac{۱}{۲}(\text{جہ} + \text{ضہ}) = \text{جم}\,\frac{۱}{۲}(\text{جہ} - \text{ضہ})$

محوروں کے ساتھ مساوی زاوئے بنائیں گے اور اس لیے

مس ½ (عہ + بہ) = ـ مس ½ (جہ + ضہ)

∴ ½ (عہ + بہ) + ½ (جہ + ضہ) = ن π

یا عہ + بہ + جہ + ضہ = ۲ ن π ، ..... (ا)

اب ایک ایسے نقطہ پر جہاں دائرہ

لا² + ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ناقص کو قطع کرتا ہے خارج المرکز زاویہ شرط

ا² جم² طہ + ب² جب² طہ + ۲ گ ا جم طہ + ۲ ف ب جب طہ + ج = ۰

کو پورا کرتا ہے ۔ پس

{(ا² ـ ب²) جم² طہ + ۲ گ ا جم طہ + ج + ب²}² = ۴ ف² ب² جب² طہ

= ۴ ف² ب² ـ ۴ ف² ب² جم² طہ

اِس لیے جم عہ + جم بہ + جم جہ + جم ضہ = ـ ۴ گ ا / (ا² ـ ب²)

اسی طرح جب عہ + جب بہ + جب جہ + جب ضہ = ـ ۴ ف ب / (ا² ـ ب²)

لیکن چونکہ عہ + بہ + جہ + ضہ = ۲ ن π

اس لیے جم ضہ = جم (عہ + بہ + جہ) اور جب ضہ = ـ جب (عہ + بہ + جہ)

نیز دائرہ کا مرکز (ـ گ ، ـ ف) ہے ۔

اِس لیے اُس دائرہ کے مرکز کے محدد جو اُن نقطوں میں سے گذرتا ہے جن کے خارج المرکز زاویے عہ ، بہ ، جہ ہیں

لا = (ا² ـ ب²) / (۴ ا) {Σ جم عہ + جم (عہ + بہ + جہ)}

اور ما = (ب² ـ ا²) / (۴ ب) {Σ جب عہ ـ جب (عہ + بہ + جہ)} ، .... (ب)

حاصل ہوتے ہیں ۔

مثال ۔ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ میں ایک متساوی الاضلاع مثلث بنایا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ متساوی الاضلاع مثلث کے مرکز ہندسی کا طریق

$$\frac{\text{لا}^2(\text{ا}^2+3\,\text{ب}^2)^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2(\text{ب}^2+3\,\text{ا}^2)^2}{\text{ب}^2} = (\text{ا}^2-\text{ب}^2)^2$$ ہے

اگر مثلث کے راس عہ، بہ، جہ ہیں تو مرکز ہندسی

$$3\,\text{لا} = \text{ا}\,(\text{جم عہ} + \text{جم بہ} + \text{جم جہ})$$

اور $$3\,\text{ما} = \text{ب}\,(\text{جب عہ} + \text{جب بہ} + \text{جب جہ})$$

سے حاصل ہوگا ۔

اب ایک متساوی الاضلاع مثلث میں مرکز ہندسی، حائط مرکز پر منطبق ہوتا ہے ۔ اس لیے

$$\frac{4\,\text{ا}}{\text{ا}^2-\text{ب}^2}\,\text{لا} - 3\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{جم}\,(\text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ})$$

اور $$\frac{4\,\text{ب}}{\text{ب}^2-\text{ا}^2}\,\text{ما} - 3\,\frac{\text{ما}}{\text{ب}} = -\,\text{جب}\,(\text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ})$$

مربع لو اور جمع کرو تو

$$\frac{(\text{ا}^2+3\,\text{ب}^2)^2\,\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{(\text{ب}^2+3\,\text{ا}^2)^2\,\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = (\text{ا}^2-\text{ب}^2)^2$$

۱۳۷ ـــ مزدوج قطروں کو محاور قرار دیکر ان کے حوالے سے ناقص کی مساوات معلوم کرنا ۔

فرض کرو کہ ناقص کے محور اعظم اور محور اصغر کے حوالے سے اسکی مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1 \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ہے ۔

چونکہ مبداء اپنی جگہ پر قائم ہے اس لیے لا ' ما کی بجائے شکل ل لا + م ما ' لَ لا + مَ ما کے جملوں کو درج کرنا ہوگا تاکہ استحالہ شدہ مساوات حاصل ہو [دفعہ ۱۱۵] -
اس لیے ناقص کی مساوات شکل

ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ۱ ' . . . . (۲)

کی ہوگی -
بموجب فرض محور لا ' محور ما کے متوازی تمام وتروں کی تنصیف کرتا ہے - اس لیے لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے (۲) سے محصلہ ما کی دو قیمتیں مساوی اور مختلف العلامت ہونی چاہئیں - پس ھ = ۰ اور اس لیے ناقص کی مساوات شکل

ا لا² + ب ما² = ۱ ' . . . . (۳)

کی ہوگی -
محوروں لا ' ما پر مقطوعوں کے طول (اَ ' بَ) معلوم کرنیکے لیے (۳) میں علی الترتیب ما = ۰ اور لا = ۰ رکھنا چاہیے چنانچہ

ا اَ² = ۱ = ب بَ²

پس مزدوج محوروں کے حوالے سے ایک ناقص کی مساوات ۱۷۱

لا² / اَ² + ما² / بَ² = ۱

ہے جہاں اَ ' بَ ' نیم قطروں کے طول ہیں -
۱۳۸ — دفعہ سابق سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب ایک ناقص کی مساوات کو مزدوج قطروں کے کسی زوج کے حوالے سے معلوم کیا جاتا ہے تو اس کی شکل وہی ہوتی ہے جو محور اعظم اور محور اصغر کو محاور مان کر حاصل کی گئی تھی -
یہ بھی مشاہدہ طلب ہے کہ دفعات ۱۱۴ ' ۱۱۵ ' ۱۱۶ ' ۱۱۹ اور ۱۲۸ درست رہتے ہیں جبکہ محددوں کے محاور مزدوج قطروں کے کوئی زوج ہوں -

۱۳۹ — وہ شرط معلوم کرنا کہ ایک ناقص کے تین نقطوں پر کے عماد ایک نقطہ پر مل سکیں -

نقطوں عہ، بہ، جہ پر کے عماد (حسب دفعہ ۱۲۵)

الا جب عہ - ب ما جم عہ = (ا² - ب²) جب عہ جم عہ، وغیرہ ہیں -
اس لیے وہ شرط کہ عہ، بہ، جہ پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں یہ ہے کہ

جب عہ	جم عہ	جب ۲ عہ
جب بہ	جم بہ	جب ۲ بہ
جب جہ	جم جہ	جب ۲ جہ

= ۰

یعنی جب ۲ عہ جب (بہ - جہ) + جب ۲ بہ جب (جہ - عہ)
+ جب ۲ جہ جب (عہ - بہ) = ۰، ... (۱)

اب جب (بہ + جہ) + جب (جہ + عہ) + جب (عہ + بہ)
اور جب (بہ - جہ) + جب (جہ - عہ) + جب (عہ - بہ)
کا حاصل ضرب

Σ جب (بہ + جہ) جب (بہ - جہ) + Σ {جب (جہ + عہ) جب (عہ - بہ)
+ جب (عہ + بہ) جب (جہ - عہ)}

ہے - لیکن ۲ Σ جب (بہ + جہ) جب (بہ - جہ) (۱۴۲)
= (جم ۲ جہ - جم ۲ بہ) + (جم ۲ عہ - جم ۲ جہ) + جم (۲ بہ - جم ۲ عہ) = ۰

نیز Σ {جب (جہ + عہ) جب (عہ - بہ) + جب (عہ + بہ) جب (جہ - عہ)}
= ½ Σ {جم (بہ + جہ) - جم (۲ عہ + جہ - بہ) + جم (۲ عہ + بہ - جہ)
- جم (بہ + جہ)}
= Σ جب ۲ عہ جب (جہ - بہ)

اور Σ جب (بہ - جہ) = -۴ جب (بہ - جہ)/۲ جب (جہ - عہ)/۲ جب (عہ - بہ)/۲

اِس لیے (ا) کا دائیں جانبی رکن [له]

$$۴ \text{ جب } \frac{\text{به} - \text{جه}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{جه} - \text{عه}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{عه} - \text{به}}{۲} \times \Sigma \text{ جب} (\text{به} + \text{جه})$$

ہے - اِس طرح مطلوبہ شرط حسب ذیل ہے:

$$\text{جب} (\text{به} + \text{جه}) + \text{جب} (\text{جه} + \text{عه}) + \text{جب} (\text{عه} + \text{به}) = ۰، \quad \ldots \ldots (ا)$$

اب اگر ہم فرض کریں کہ عه اور به معلوم ہیں تو رشتہ (ا) سے جه کی دو قیمتیں حاصل ہونگی - فرض کرو کہ یہ قیمتیں جه اور ضه ہیں - تب مساوات توں

$$\text{جب} (\text{به} + \text{جه}) + \text{جب} (\text{جه} + \text{عه}) + \text{جب} (\text{عه} + \text{به}) = ۰$$

$$\text{اور} \quad \text{جب} (\text{به} + \text{ضه}) + \text{جب} (\text{ضه} + \text{عه}) + \text{جب} (\text{عه} + \text{به}) = ۰$$

سے، عمل تفریق اور جب $\frac{۱}{۲}$ (جه - ضه) سے تقسیم کرنے کے بعد، حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم} \frac{۱}{۲} (۲ \text{ به} + \text{جه} + \text{ضه}) + \text{جم} \frac{۱}{۲} (۲\text{عه} + \text{جه} + \text{ضه}) = ۰$$

اِسس لیے

$$\text{جم} \frac{۱}{۲} (\text{عه} + \text{به} + \text{جه} + \text{ضه}) = ۰$$

پس اگر عه، به، جه، ضه پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں تو

$$\text{عه} + \text{به} + \text{جه} + \text{ضه} = (۲ \text{ن} + ۱) \pi، \quad \ldots \ldots \ldots (ب)$$

یہ ظاہر ہے کہ شرط (ب) ضروری ہے لیکن وہ کافی نہیں ہے کیونکہ اِس سے یہ لازم نہیں آتا کہ عه، به، جه، ضه پر کے عماد ہم نقطہ ہوں گے۔ [دیکھو دفعہ ۱۹۹]

مثال ا - ایک ناقص میں ایک مثلث بنایا گیا ہے - معلوم کرو کہ اِس کا رقبہ کب بڑے سے بڑا ہوگا۔

له طریقہٴ بالا پروفیسر اینگلن سے منسوب ہے -

فرض کرو کہ مثلث کے راسوں ف، ق، ر کے خارج المرکز زاویے فہ۱، فہ۲، فہ۳ ہیں ۔ فرض کرو کہ ان کے جواب میں امدادی دائرہ پر کے نقطے ف، ق، ر ہیں ۔

(۱۷۳) مثلثوں ف ق ر، ف ق ر کے رقبے حسب ذیل ہیں :

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{ا جم فہ}_1 & \text{ب جب فہ}_1 & 1 \\ \text{ا جم فہ}_2 & \text{ب جب فہ}_2 & 1 \\ \text{ا جم فہ}_3 & \text{ب جب فہ}_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{ا جم فہ}_1 & \text{ا جب فہ}_1 & 1 \\ \text{ا جم فہ}_2 & \text{ا جب فہ}_2 & 1 \\ \text{ا جم فہ}_3 & \text{ا جب فہ}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \ \Delta\,\text{ف ق ر} : \Delta\,\text{ف ق ر} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

پس مثلثوں ف ق ر اور ف ق ر کے رقبوں میں مستقل نسبت $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ ہے اس لیے ف ق ر بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ ف ق ر بڑے سے بڑا ہو ۔
اب ف ق ر بڑے سے بڑا ہوتا ہے جبکہ وہ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہو اور ایسی صورت میں $\text{فہ}_1 - \text{فہ}_2 = \text{فہ}_2 - \text{فہ}_3 = \text{فہ}_3 - \text{فہ}_1 = \frac{2\pi}{3}$ ۔
پس جب ایک ناقص میں بنایا ہوا مثلث بڑے سے بڑا ہوتا ہے تو اسکے راسوں کے خارج المرکز زاویے عہ، عہ + $\frac{2\pi}{3}$، عہ + $\frac{4\pi}{3}$ ہوتے ہیں ۔

مثال ۲ ۔ اگر ایک ناقص کے مزدوج قطروں کا کوئی زوج، نقطہ ن پر کے مماس کو ت، تَ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ت ن × ن تَ = ج د² جہاں ج د، ج ن مزدوج قطر ہیں ۔

ج د، ج ن کو علی الترتیب محور ما اور محور لا قرار دو تو ناقص کی مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1 \ \text{ہوگی}$$

نقطہ ن (ا، ۰) پر کے مماس کی مساوات لا = ا ہوگی ۔
اگر مزدوج قطروں کے کسی زوج کی مساواتیں ما = م لا، ما = مَ لا ہوں تو

$$م م َ = - \frac{ب^۲}{ا^۲} \quad [\text{دفعہ } ۱۲۸] \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

لیکن ن ت = م ا ، اور ن تَ = مَ ا

$$\therefore \quad ن ت \times ن تَ = م مَ ا^۲ ، \ldots\ldots\ldots (۲)$$

$$\therefore \quad ت ن \times ن تَ = ب^۲ ، \quad (۱) \text{ سے}$$

مثال ۳ ــ ایک ناقص کے کسی دو قطروں کے سِروں کو ملانے والا خط ہمیشہ ایک ثابت دائرہ کو مس کرے گا اگر قطر باہم علی القوائم ہوں ــ

فرض کرو کہ ج ف ، ج ق دو قطر ہیں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔
فرض کرو کہ خط ف ق کی مساوات لا جم عہ + ما جب عہ = ع ہے ۔
خطوط ج ف اور ج ق کی مساواتیں (دفعہ ۳۸)

$$\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = \left(\frac{لا \text{ جم عہ} + ما \text{ جب عہ}}{ع}\right)^۲ ، \ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہونگی ــ
لیکن چونکہ خطوط ج ف اور ج ق باہم علی القوائم ہیں اس لیے (۱) میں $لا^۲$ اور $ما^۲$ کے سَروں کا مجموعہ صفر ہے [دفعہ ۳۶] ۔

$$\therefore \quad \frac{۱}{ا^۲} + \frac{۱}{ب^۲} = \frac{۱}{ع^۲}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مرکز سے خط ف ق کا عمودی فاصلہ مستقل ہے ۔
اِس لیے خط ف ق ہمیشہ ایک دائرہ کو مس کرتا ہے ۔

مثال ۴ ــ ایک ناقص کے عمادی وتروں کے قطبوں کا طریق معلوم کرو ــ

کسی نقطہ طہ پر کے عماد کی مساوات

$$\frac{\text{ا لا}}{\text{جم طہ}} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب طہ}} = \text{ا}^{2} - \text{ب}^{2} \text{،} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ہے۔ کسی نقطہ (لاَ، مَا) کے قطبی کی مساوات

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما مَا}}{\text{ب}^{2}} = 1 \text{،} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ہے۔ مساواتیں (۱) اور (۲) ایک ہی خط کو تعبیر کرینگی اگر

$$(\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}) \frac{\text{لاَ}}{\text{ا}^{2}} = \frac{\text{ا}}{\text{جم طہ}} \text{، اور } (\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}) \frac{\text{مَا}}{\text{ب}^{2}} = - \frac{\text{ب}}{\text{جب طہ}}$$

$$\text{یا} \quad (\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}) \,\text{جم طہ} = \frac{\text{ا}^{3}}{\text{لاَ}} \text{، اور } (\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}) \,\text{جب طہ} = - \frac{\text{ب}^{3}}{\text{مَا}}$$

اس لیے اِن دو آخری مساواتوں کا مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$(\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2})^{2} = \frac{\text{ا}^{6}}{\text{لاَ}^{2}} + \frac{\text{ب}^{6}}{\text{مَا}^{2}}$$

اور اس لیے طریق کی مساوات

$$\text{لاَ}^{2}\,\text{مَا}^{2}\,(\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2})^{2} = \text{ا}^{6}\,\text{مَا}^{2} + \text{ب}^{6}\,\text{لاَ}^{2}$$

ہے۔

مثال ۵۔ اگر ایک ناقص کے گرد ایک ذواربعۃ الاضلاع کھینچا جائے تو اس کے وتروں کے نقاط وسطی میں سے گذرنیوالا خط ناقص کے مرکز میں سے گذرے گا۔

فرض کرو کہ مماسوں کے چار نقاط تماس کے خارج المرکز زاویے عہ، بہ، جہ، ضہ ہیں۔

نقطہ عہ، بہ پر کے مماسوں کی مساواتیں

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم عہ} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب عہ} = ۱ \text{ ، اور } \frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم بہ} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب بہ} = ۱$$

ہیں - یہ مماس نقطہ

$$\left(\text{ا}\,\frac{\text{جم}\,\frac{1}{2}\,(\text{عہ} + \text{بہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}\,(\text{عہ} - \text{بہ})} \text{ ، } \text{ب}\,\frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}\,(\text{عہ} + \text{بہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}\,(\text{عہ} - \text{بہ})} \right)$$

پر ملتے ہیں - اسی طرح جہ اور ضہ پر کے مماس نقطہ

$$\left(\text{ا}\,\frac{\text{جم}\,\frac{1}{2}\,(\text{جہ} + \text{ضہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}\,(\text{جہ} - \text{ضہ})} \text{ ، } \text{ب}\,\frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}\,(\text{جہ} + \text{ضہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}\,(\text{جہ} - \text{ضہ})} \right)$$

پر ملیں گے -

اُس خط کے نقطہ وسطی کے محدد جو اِن نقاط تقاطع کو ملاتا ہے ۱۷)

$$\text{لا} = \frac{\text{ا}}{۲}\,\frac{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}-\text{ضہ}) + \text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}+\text{ضہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}-\text{ضہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})} \text{ ،}$$

$$\text{ما} = \frac{\text{ب}}{۲}\,\frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}-\text{ضہ}) + \text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}+\text{ضہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}-\text{ضہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}$$

سے حاصل ہوتے ہیں -

اس لیے وہ خط جو اس نقطہ کو ناقص کے مرکز سے ملاتا ہے محور اعظم کے ساتھ ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا مماس

$$\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}-\text{ضہ}) + \text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}+\text{ضہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}-\text{ضہ}) + \text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{جہ}+\text{ضہ})\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{عہ}-\text{بہ})}$$

ہے اور یہ

$$\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\frac{\text{جب}\,(\text{س}-\text{عہ}) + \text{جب}\,(\text{س}-\text{بہ}) + \text{جب}\,(\text{س}-\text{جہ}) + \text{جب}\,(\text{س}-\text{ضہ})}{\text{جم}\,(\text{س}-\text{عہ}) + \text{جم}\,(\text{س}-\text{بہ}) + \text{جم}\,(\text{س}-\text{جہ}) + \text{جم}\,(\text{س}-\text{ضہ})}$$

کے مساوی ہے جہاں $۲\,\text{س} = \text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ}$ -

اوپر کے نتیجہ کے تشاکل سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ وہ خط جو ناقص کے مرکز کو ذو اربعۃ الاضلاع کے وتروں میں سے ایک کے نقطہ وسطی سے ملاتا ہے دوسرے

دو وتروں کے نقاط وسطی میں سے بھی گذرتا ہے۔ اس سے نیوٹن کا یہ مسئلہ ثابت ہوتا ہے: **اگر ایک ناقص ایک ذوار بعتہ الاضلاع کے ضلعوں کو مس کرے تو اس کا مرکز اس خط پر ہوتا ہے جو وتروں کے نقاطِ وسطی میں سے گذرتا ہے۔** [نیز دیکھو دفعات ۲۱۹ اور ۲۴۴]

مثال ۶۔ ف ق ر ایک مثلث ہے جو دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \text{ا}^2 = 0$ **میں بنایا گیا ہے۔ اضلاع ف ق، ف ر علی الترتیب نقطوں (ب، ۰) اور (ج، ۰) میں سے گذرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق ر، مخروطی** $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 (\text{ا}^2 - \text{ب ج})^2 / \{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2) \times (\text{ا}^2 - \text{ج}^2)\} = \text{ا}^2$ **کو مس کرتا ہے۔**

فرض کرو کہ ف، ق، ر کے محدد علی الترتیب $(\text{ا جم طہ}_1, \text{ا جب طہ}_1)$ وغیرہ ہیں۔

ف ق کی مساوات

$$\text{لا جم}\tfrac{1}{2}(\text{طہ}_1+\text{طہ}_2) + \text{ما جب}\tfrac{1}{2}(\text{طہ}_1+\text{طہ}_2) = \text{ا جم}\tfrac{1}{2}(\text{طہ}_1-\text{طہ}_2)$$

ہے۔ مس $\tfrac{1}{2}\text{طہ}_1$ وغیرہ کی بجائے م_1 وغیرہ رکھنے سے

$$\frac{\text{ب}}{\text{ا}} = \frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{طہ}_1-\text{طہ}_2)}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{طہ}_1+\text{طہ}_2)} = \frac{1+\text{م}_1\text{م}_2}{1-\text{م}_1\text{م}_2}$$

اسی طرح

$$\frac{\text{ج}}{\text{ا}} = \frac{1+\text{م}_1\text{م}_3}{1-\text{م}_1\text{م}_3}$$

پس $\text{م}_1\text{م}_2(\text{ا}+\text{ب}) + (\text{ا}-\text{ب}) = 0$ اور $\text{م}_1\text{م}_3(\text{ا}+\text{ج}) + (\text{ا}-\text{ج}) = 0$

∴ م۲ / م۳ = (ا + ج) (ا - ب) / (ا - ج) (ا + ب) = لہ ... (۱)

اب ق ر۲ کی مساوات

لا جم ½ (طہ۲ + طہ۳) + ما جب ½ (طہ۲ + طہ۳) = ا جم ½ (طہ۲ - طہ۳)

یعنے ا - لا + (ا + لا) م۲ م۳ - ما (م۲ + م۳) = ۰

۱۷۶ ہے۔ اسلیے (۱) سے

(ا - لا) لہ + (ا + لا) م۲² - ما (لہ + ۱) م۲ = ۰

جس کا لفاف، م۲ کی مختلف قیمتوں کے لیے،

۴ لہ (ا + لہ) (ا - لا) = (لہ + ۱)² ما²

ہے جہاں لہ = (ا + ج) (ا - ب) / (ا - ج) (ا + ب)

چھٹے باب پر مثالیں

۱ — اگر ایک ناقص (مرکز ج) کے نقطہ ن کے ماسکی فاصلے س ن، سَ ن ہوں اور ج د وہ نیم قطر ہو جو ج ن کا مزدوج ہے تو ثابت کرو کہ س ن × سَ ن = ج د² ۔

۲ — ایک ناقص کے نقطہ ن پر کا مماس، ا پر کے مماس سے جہاں ا محور ا ج اَ کا ایک سرا ہے نقطہ ما پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج ما، اَ ن کے متوازی ہے جہاں ج ناقص کا مرکز ہے۔

۳ — ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو متقاطع خطوطِ مستقیم سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا طریق ایک ناقص ہے۔ نیز خروج المرکز کو خطوط کے درمیانی زاویے کی رقوم میں معلوم کرو۔

۴ — ایک ناقص پر دو ثابت نقطے ف، ق ہیں اور اس پر ر کوئی اور نقطہ ہے۔ ف ر، ق ر کے نقاط وسطی ط، طَ ہیں اور ط گ، طَ گَ

علی الترتیب ف ر، ق ر پر عمود ہیں اور وہ محور سے گ، گَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ گ گَ مستقل ہے۔

۵ — ناقصوں کا ایک سلسلہ معلومہ ماسکہ اور متناظر مرتب کے ساتھ کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے محاور اصغر کے سروں کا طریق ایک مکافی ہے۔

۶ — ایک ناقص کا ایک دوہرا معین ن ل نَ ہے اور ق، ناقص کوئی نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ق ن، ق نَ محور اصغر سے علی الترتیب م، مَ پر ملیں تو ج م × ج مَ = ج ا^2۔

۷ — ایک ناقص کے ماسکوں میں سے گذرتے ہوئے خطوط کھینچے گئے ہیں جو علی الترتیب مزدوج قطروں کے ایک زوج پر عمود ہیں اور ق پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک ہم مرکز ناقص ہے۔

۸ — ایک ناقص کے کسی نقطہ ن پر کا مماس مساوی مزدوج قطروں کو ت، تَ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلثوں ت ج ن اور تَ ج ن میں نسبت ج ت^2 : ج تَ^{2} ہے۔

(۱۷۷) ۹ — اگر ج ق، ن پر کے عماد کا مزدوج ہو تو ج ن، ق پر کے عماد کا مزدوج ہوگا۔

۱۰ — اگر ایک ناقص کے مزدوج قطروں کے سرے ن، د ہوں اور ن نَ، د دَ وہ وتر ہوں جو ناقص کے ایک محور کے متوازی ہیں تو ثابت کرو کہ ن دَ، نَ د، مساوی مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔

۱۱ — اگر مزدوج قطروں کے سرے ن، د ہوں اور ن پر کا مماس محورِ اعظم کو ت پر اور د پر کا مماس محورِ اصغر کو تَ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ت تَ، مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک کے متوازی ہے۔

۱۲ — ایک ناقص کا کوئی وتر ق قَ ہے جو ایک مساوی مزدوج قطر کے متوازی ہے۔ ق، قَ پر کے مماس ت پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ دائرہ ق ت قَ، مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۱۳ — ثابت کرو کہ ایک ناقص میں کسی نقطہ پر کا عماد اُن عمودوں کا چوتھا

تناسبی ہے جو مرکز سے اور دو ماسکوں سے مماس پر کھینچے گئے ہوں۔

۱۴ — ایک ناقص کے دو مزدوج قطر کھینچے گئے ہیں اور ان کے چار سروں کو ایک معلومہ دائرہ کے کسی نقطہ سے ملا یا گیا ہے۔ دائرہ کا مرکز ناقص کے مرکز پر ہے۔ ثابت کرو کہ ان چار خطوں کے طولوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔

۱۵ — ایک ناقص کا ایک دوہرا معین ن ل نَ ہے، ناقص کا مرکز ج ہے اور ن پر کا عماد، ج نَ سے و پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ و کا طریق ایک ناقص ہے۔

۱۶ — اگر کسی نقطہ ن پر کا عماد محور اعظم کو گ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ن کے مختلف محلوں کے لیے ن گ کے وسطی نقطہ کا طریق ایک قطع ناقص ہے۔

۱۷ — ایک ناقص کے راس ا، اَ ہیں اور اس پر کوئی نقطہ ن ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ن ل، ا ن پر عمود ہو اور ن م، اَ ن پر عمود ہو جہاں م اور ن، محور ا اَ پر ہیں تو م ن ناقص کے وتر خاص کے مساوی ہے۔

۱۸ — ایک ایسے نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو جس سے ایک ناقص کے دو مماس جو محور اعظم کے ساتھ زاویے $طہ_1$، $طہ_2$ بنائیں کھینچے جاسکیں اور (۱) مس $طہ_1$ + مس $طہ_2$ مستقل ہو، (۲) مم $طہ_1$ + مم $طہ_2$ مستقل ہو، یا (۳) مس $طہ_1$ × مس $طہ_2$ مستقل ہو۔

۱۹ — ایک ناقص کے کسی دو قطروں کے دو سروں کو ملانیوالا خط اس خط کے متوازی یا مزدوج ہوتا ہے جو ان کے مزدوج قطروں کے دو سروں کو ملاتا ہے۔

۲۰ — اگر ایک ناقص کے مزدوج قطروں کے سرے ن اور د ہوں تو ثابت کرو کہ ن اور د پر کے مماس ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۲$ پر ملتے ہیں اور ن د کے نقطہ وسطی کا طریق $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = \frac{۱}{۲}$ ہے۔ (۱۷۸)

۲۱ — ایک خط کھینچا گیا ہے جو ایک ناقص کے محور اصغر کے متوازی ہے

اور ایک ماسکہ اور متناظر مرتب کے وسط میں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اس ماسکہ میں سے گذرنے والے کسی وتر کے سِروں سے اس خط پر عمود کھینچے جائیں تو اِن عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہوگا۔

۲۲ — دو نقطوں کے خارج المرکز زاویے عہ، بہ ہیں۔ اگر ان کو ملانیوالا وتر ایک ناقص کے محور اعظم کو مرکز سے فاصلہ ف پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\,\frac{\text{عہ}}{2}\,\text{مس}\,\frac{\text{بہ}}{2} = \frac{\text{ف} - \text{ا}}{\text{ف} + \text{ا}}$$ جہاں ۲ا محور اعظم کا طول ہے۔

۲۳ — اگر ایک ناقص کے محور اعظم پر کے دو نقطوں میں سے کوئی دو دو وتر کھینچے جائیں جو مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوں تو ثابت کرو کہ $\text{مس}\,\frac{\text{عہ}}{2}\,\text{مس}\,\frac{\text{بہ}}{2}\,\text{مس}\,\frac{\text{جہ}}{2}\,\text{مس}\,\frac{\text{ضہ}}{2} = 1$

جہاں عہ، بہ، جہ، ضہ، وتروں کے سِروں کے خارج المرکز زاویے ہیں۔

۲۴ — اگر ایک ناقص کے ماسکے س، ھ ہوں اور منحنی پر کوئی نقطہ ا لیا جائے، اور وتر ا س ب، ب ھ ج، ج س د، د ھ ع، .... کھینچے جائیں اور ا، ب، ج، د، .... کے خارج المرکز زاویے طہ_1، طہ_2، طہ_3 .... ہوں تو ثابت کرو کہ $\text{مس}\,\frac{\text{طہ}_1}{2}\,\text{مس}\,\frac{\text{طہ}}{2} = \text{مم}\,\frac{\text{طہ}_2}{2}\,\text{مم}\,\frac{\text{طہ}_3}{2} = \text{مس}\,\frac{\text{طہ}_3}{2}$

$\text{مس}\,\frac{\text{طہ}_4}{2} = \ldots\ldots$ ۔

۲۵ — ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جو اُن نقطوں پر کے مماسوں سے بنے جن کے خارج المرکز زاویے عہ، بہ، جہ ہیں ا ب $\text{مس}\,\frac{1}{2}(\text{بہ} - \text{جہ})$ $\times\,\text{مس}\,\frac{1}{2}(\text{جہ} - \text{عہ})\,\text{مس}\,\frac{1}{2}(\text{عہ} - \text{بہ})$ ہے۔

۲۶ — اُن نقطوں پر جن کے خارج المرکز زاویے فہ_1، فہ_2، فہ_3 ہیں مماس کھینچے گئے ہیں اور ان مماسوں سے جو مثلث بنتا ہے اُس کا حائط دائرہ کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر

$$\frac{\text{ف ق ر}}{32\,\text{ا ب}}\ \text{قط}\,\frac{\text{فہ}_1 - \text{فہ}_2}{2}\ \text{قط}\,\frac{\text{فہ}_3 - \text{فہ}_1}{2}\ \text{قط}\,\frac{\text{فہ}_2 - \text{فہ}_3}{2}$$

ہے جہاں ف، ق، ر، ناقص کے اُن قطروں کے طول ہیں جو مثلث کے ضلعوں کے متوازی ہیں اور ناقص کے نیم محور ا، ب ہیں۔

۲۷ — ایک ناقص کے کسی نقطہ ن سے خطوطِ مستقیم کھینچے گئے ہیں جو ماسکوں س، ھ میں سے گذرتے ہیں اور متناظر مرتب کو ق، ر پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق ھ اور ر س کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک ناقص ہے۔ (۱۷۹)

۲۸ — اگر ایک ناقص (مرکز ج) اور اس کے امدادی دائرے پر ن، ن' متناظر نقطے ہوں اور اگر ج ن کو خارج کیا جائے اور وہ امدادی دائرہ سے ق پر ملے تو ثابت کرو کہ ق کے متناظر ناقص کے نقطہ ق پر کا مماس، ج ن پر عمود ہے اور وہ ج ن سے، ج ن کے مساوی طول قطع کرتا ہے۔

۲۹ — اگر ایک ناقص کے دو عمود دار مماسوں کے نقاط تماس ف، ق ہوں اور امدادی دائرہ پر متناظر نقطے ف، ق ہوں تو ثابت کرو کہ ج ف، ج ق، ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔

۳۰ — دو ہم مرکز دائروں کے مرکز ج سے دو نصف قطر ج ق، ج ق کھینچے گئے ہیں جو ایک ثابت خطِ مستقیم سے مساوی المیلان ہیں، پہلا نصف قطر بیرونی دائرہ کا ہے اور دوسرا اندرونی دائرہ کا۔ ثابت کرو کہ (۱) ق ق کے نقطہ وسطی ن کا طریق ایک ناقص ہے، (۲) ن ق اس ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد ہے، اور (۳) ق ق اُس قطر کے مساوی ہے جو ج ن کا مزدوج ہے۔

۳۱ — اگر ایک ناقص کے دو نقطوں کے خارج المرکز زاویوں کا فرق سہ ہو اور اِن نقطوں پر کے مماس باہم علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ ا ب جب سہ = لہ مہ جہاں ل، مہ وہ نیم قطر ہیں جو اِن نقطوں پر کے مماسوں کے متوازی ہیں اور ناقص کے نیم محور ا، ب ہیں۔

۳۲ — دو مساوی دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں، ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس سے دائروں کے مماس کھینچے جائیں تو اِن کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔

۳۳ — ثابت کرو کہ اگر دو مزدوج قطروں میں سے ہر ایک کے دو سِروں سے

ناقص کے کسی مماس پر عمود کھینچے جائیں تو اِن عمودوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ اُس عمود کے مربع کے مساوی ہوگا جو مرکز سے مماس پر کھینچا جائے ۔

۳۴ — ایک ناقص (مرکز ج) کے کسی نقطہ ن کے عماد پر ایک نقطہ ق ایسا ہے کہ خطوط ج ن، ج ق، ناقص کے محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن ق، اُس قطر کے متناسب ہے جو ج ن کا مزدوج ہے۔

(۱۸۰) ۳۵ — اگر ایک مخروطی کے مماسوں کا ایک زوج باہم علی القوائم ہو اور وتر تماس پر مرکز سے اور مماسوں کے نقطہ تقاطع سے عمود کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ اِن عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہے ۔

۳۶ — ایک ناقص پر دو علی القوائم مماس کھینچے گئے ہیں ۔ وتر تماس کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو ۔

۳۷ — اگر ایک ناقص پر کوئی نقطہ ن ہو اور کوئی وتر ن ق، ن ج کے مزدوج قطر کو ر پر قطع کرے تو ن ق × ن ر، ن ق کے متوازی قطر کے مربع کا نصف ہوگا ۔

۳۸ — ایک ناقص کے اُن تمام وتروں کے نقاط وسطی کا طریق معلوم کرو جو مستقل طول کے ہیں ۔

۳۹ — اگر ایک ناقص میں بنائے ہوئے ذو اربعۃ الاضلاع کے تین ضلع علی الترتیب تین دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ چوتھا ضلع بھی ایک ثابت خطِ مستقیم کے متوازی ہوگا ۔

۴۰ — اگر ایک کثیر الاضلاع کو ایک ناقص میں بنایا جائے اور اس کے تمام ضلع اِلّا ایک کے دئے ہوئے خطوطِ مستقیم کے متوازی ہوں تو اگر ضلعوں کی تعداد جفت ہے تو بقیہ ضلع ایک معلومہ خطِ مستقیم کے متوازی ہوگا لیکن اگر ضلعوں کی تعداد طاق ہے تو بقیہ ضلع ایک ناقص کو لف کرے گا ۔

۴۱ — اُس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ایک ناقص کے قطروں کے کسی زوج کے سروں پر کے مماسوں سے بنتا ہے اُس متوازی الاضلاع کے رقبہ کے بالعکس متناسب ہوتا ہے جو نقاط تماس کو ملانے سے حاصل ہوتا ہے۔

۴۲ — اگر ایک ناقص کے کسی دو قطروں ج ن، ج ق کے سروں ن، ق پر دو مماس ن ن، ق ق کھینچے جائیں اور وہ ایک دوسرے کو ت پر اور محدودہ قطروں کو ن اور ق پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ مثلثوں ت ق ن، ت ن ق کے رقبے مساوی ہیں —

۴۳ — ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{یا}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے دو مماس و ن، و ق، نقطہ و سے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ج ن ق کا رقبہ

$$= \frac{\text{ا}\,\text{ب}\sqrt{\text{ب}^2\text{ھ}^2 + \text{ا}^2\text{ک}^2 - \text{ا}^2\text{ب}^2}}{\text{ب}^2\text{ھ}^2 + \text{ا}^2\text{ک}^2}$$

اور ذوار بعتہ الاضلاع و ن ج ق کا رقبہ

$$= (\text{ب}^2\text{ھ}^2 + \text{ا}^2\text{ک}^2 - \text{ا}^2\text{ب}^2)^{\frac{1}{2}}$$

ہے جہاں ناقص کا مرکز ج ہے اور و کے محدد (ھ، ک) ہیں۔

۴۴ — ایک ناقص کے مماس ت ن، ت ق ہیں اور اس کا مرکز ج (۱۸۱)
ہے، ثابت کرو کہ ذو اربعتہ الاضلاع ج ن ت ق کا رقبہ = ا ب مس $\frac{1}{2}$(فہ - فہَ) جہاں ناقص کے نیم محور ا، ب ہیں اور ن، ق کے خارج المرکز زاویے فہ، فہَ ہیں —

۴۵ — ایک ناقص کا ایک قطر ج نَ ہے اور امدادی دائرہ کا متناظر قطر ق ج قَ ہے۔ ثابت کرو کہ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو ن، نَ، ق، قَ پر کے مماسوں سے بنتا ہے $\frac{\text{۸ ا}^2\text{ب}}{(\text{ا - ب})\ \text{جب}^2\ \text{فہ}}$ ہے جہاں فہ، ن کا خارج المرکز زاویہ ہے۔

۴۶ — ایک متوازی الاضلاع کو ایک دائرہ کے گرد کھینچا گیا ہے اور اسکے دو راس ثابت خطوطِ مستقیم پر ہیں جو ایک دوسرے کے متوازی اور مرکز سے مساوی

فاصلہ پر ہیں۔ ثابت کرو کہ دو سرے دو راس ایک ناقص پر ہیں جس کا امدادی
صغیر دائرہ متوازی الاضلاع کا حائط دائرہ ہے۔

۴۷ ــــ ایک ناقص کے دو ثابت مزدوج قطروں کو دو خطوطِ مستقیم و ن، و ق جو ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرتے ہیں اور مزدوج قطروں کے کسی دوسرے زوج کے متوازی ہیں علی الترتیب نقطوں ن، ق پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن ق کے وسطی نقطہ کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

۴۸ ــــ اگر ایک ناقص کے مستوی میں و کوئی نقطہ ہو اور اس سے مساوی مزدوج قطروں پر عمود و م، و ل کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع م و ل ن کے وتر کی سمت و ن، و کے قطبی پر عمود ہوگی۔

۴۹ ــــ ایک ناقص پر جس کا مرکز ج ہے تین نقطے ا، ن، ب لیے گئے ہیں۔ نقطہ ن میں سے دو خطوطِ مستقیم، نقطوں ا اور ب پر کے مماسوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں جو ج ب اور ج ا سے علی الترتیب ق اور ر پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق ر، ن پر کے مماس کے متوازی ہے۔

۵۰ ــــ ایک ناقص کے دو نقطوں پر کے عمادوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرو جبکہ نقطے مزدوج قطروں کے سرے ہوں۔

۵۱ ــــ ایک ناقص کے ایک وتر کے سروں پر جو مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک کے متوازی ہے عماد کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ عماد ایک قطر پر متقاطع ہوتے ہیں جو دوسرے مساوی مزدوج قطر پر عمود ہے۔

۵۲ ــــ اگر ایک ناقص کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر عماد کھینچے جائیں تو وہ خط جو ان کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے اور محورِ اعظم کے متوازی ہے وتر کی تنصیف کرے گا۔

۵۳ ــــ اگر ایک ناقص (مرکز ج) کے کسی نقطہ ن پر کے عماد میں طول (۱۸۲)
ن ق، اس نیم قطر کے مساوی قطع کیا جائے جو ج ن کا مزدوج ہے تو ثابت کرو کہ ق، دو دائروں میں سے ایک یا دوسرے پر ہے۔

۵۴ ــــ نقطہ (لاَ، ماَ) سے ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$ کے مماس کھینچے

گئے ہیں ۔ اگر اِن مماسوں کا درمیانی زاویہ فہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$(لَا^۲ + مَا^۲ - ا^۲ - ب^۲) \text{ مس فہ} = ۲\sqrt{(ب^۲ لَا^۲ + ا^۲ مَا^۲ - ا^۲ ب^۲)}\ ۔$$

۵۵ ــ ت ن، ت ق وہ مماس ہیں جو ایک بیرونی نقطہ (لَا، مَا) سے ناقص $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کے کھینچے گئے ہیں ۔ اگر ایک ماسکہ س ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{س ت^۲}{س ن \times س ق} = \frac{لَا^۲}{ا^۲} + \frac{مَا^۲}{ب^۲}$$

۵۶ ــ نقطہ ت سے ایک ناقص $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کے دو مماس کھینچے گئے ہیں اور یہ مماس زاویہ فہ پر متقاطع ہوتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ س ت × ھ ت جم فہ = ج ت^۲ - ا^۲ - ب^۲ جہاں ج مرکز اور س، ھ ماسکے ہیں۔

۵۷ ــ اگر ایک ناقص کے مرکز ج سے کسی نقطہ ن پر کے مماس پر عمود کھینچا جائے اور یہ عمود ماسکی فاصلہ س ن سے (ممدودہ بضرورت) ر پر ملے تو ر کا طریق ایک دائرہ ہوگا ۔

۵۸ ــ اگر دو ہم مرکز ناقص ایسے ہوں کہ ایک کے ماسکے دوسرے پر واقع ہوں اور اگر اِن کے خروج المرکز ز، زَ ہوں تو ثابت کرو کہ اِن کے محاور

زاویہ جم$^{-۱}\frac{\sqrt{ز^۲ + زَ^۲ - ۱}}{ز زَ}$ پر مائل ہونگے ۔

۵۹ ــ ثابت کرو کہ وہ زاویہ جو ناقص کے ایک قطر کے محاذی محور اعظم کے کسی ایک سرے پر بنتا ہے اُس زاویہ کا متمم ہوتا ہے جو مزدوج قطر کے محاذی محور اصغر کے سرے پر بنتا ہے ۔

۶۰ ــ اگر ناقص کے مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سروں پر

محورِ اعظم کے محاذی زاویے طہ، طَہ بنیں تو ثابت کرو کہ مم^{2} طہ + مم^{2} طَہ مستقل ہے۔

۶۱ — اگر ایک ناقص کے ماسکوں کے درمیانی فاصلہ کے محاذی مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سروں پر زاویے ۲طہ، ۲طَہ بنیں تو ثابت کرو کہ مس^{2} طہ + مس^{2} طَہ مستقل ہے۔

۶۲ — اگر لہ، لَہ وہ زاویے ہوں جو کسی دو مزدوج قطروں کے محاذی (۱۸۳)
ناقص کے کسی ثابت نقطہ پر بنتے ہیں تو ثابت کرو کہ مم^{2} لہ + مم^{2} لَہ مستقل ہے۔

۶۳ — ثابت کرو کہ ناقص کے مزدوج قطروں کے زوج کسی خطِ مستقیم سے درپیچ میں منقطع ہوتے ہیں۔

۶۴ — ایک دائرہ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کو ثابت نقطہ (عہ، بہ) پر اور ناقص کے ایک قطر کے سروں پر قطع کرتا ہے ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ناقص ۲ا^{2} لا^{2} + ۲ب^{2} ما^{2} = (ا^{2} − ب^{2}) (عہ لا − بہ ما) ہے۔

۶۵ — $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے چار نقطوں پر کے عماد نقطہ (عہ، بہ) پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن چار نقطوں کا اوسط محل

{ ½ ا^{2} عہ \ (ا^{2} − ب^{2})، ½ ب^{2} بہ \ (ب^{2} − ا^{2}) }

ہے۔

۶۶ — ایک ناقص پر چار ثابت نقطے ا، ب، ج، د ہیں اور اس پر ن کوئی دوسرا نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ن سے اب اور ج د، ب ج اور د ا پر عمود کھینچے جائیں تو اب اور ج د پر کے عمودوں کا حاصل ضرب، ب ج اور د ا پر کے عمودوں کے حاصل ضرب کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے۔

۶۷ — ایک ناقص کے دو عماد ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ اِن کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۶۸ — ایک ناقص کے ایک ماسکی وتر کے ایک سرے پر مماس کھینچا گیا ہے،

میں سے کسی ایک کا مماس ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}-1=0$ سے ایسے دو نقطوں پر ملیگا جن پر کے مماس مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوں گے ۔

۷۴ ـــ ایک متوازی الاضلاع کو ناقص

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}-1=0$$

کے گرد کھینچا گیا ہے اور اس کے دو راس خطوط $\text{لا}^2-\text{ھ}^2=0$ پر ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے دوسرے دو راس مخروطی

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2\left(\frac{\text{ا}^2}{\text{ھ}^2}-1\right)}{\text{ب}^2}-1=0$$

پر ہیں ۔

۷۵ ـــ ایک مثلث کے ضلع دائرہ $\text{لا}^2+\text{ما}^2-\text{ا}^2=0$ کو مس کرتے ہیں اور اس کے دو راس خطوط $\text{ما}^2-\text{ب}^2=0$ پر ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرے راس کا طریق

$$\text{لا}^2+\text{ما}^2-\text{ا}^2-\frac{4\,\text{ا}^2\,\text{ب}^2\,\text{لا}^2}{(\text{ا}^2-\text{ب}^2)^2}=0$$

ہے ۔

اور دوسرے سرے پر عماد کھینچا گیا ہے۔ اِن کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۶۹ — ایک ناقص کے محورِ اعظم کے متوازی دو خطوطِ مستقیم محورِ اعظم سے فاصلہ $\frac{\text{اب}}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{ب}^2}}$ پر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن خطوط کے درمیان کسی مماس کا مقطوعہ نقطہ تماس پر دو حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن کے محاذی مرکز پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔

۷۰ — ایک ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد ن گ ہے جہاں گ محورِ اعظم میں ہے۔ ن گ کو باہر وار ق تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ ن ق = گ ن۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک ناقص ہے جس کا خروج المرکز $\frac{\text{ا}^2-\text{ب}^2}{\text{ا}^2+\text{ب}^2}$ ہے۔ نیز ن اور ق پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۷۱ — ایک ناقص کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی پر ن سے عمود کھینچا گیا ہے جو محورِ اعظم کو گ پر قطع کرتا ہے۔ گ کو مرکز مان کر کوئی دائرہ کھینچا گیا ہے جو ناقص کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن اُن دو متوازی خطوں سے جو چار نقطوں میں سے گذرتے ہیں مساوی فاصلہ پر ہے۔

۷۲ — ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$ کا وتر

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ط}_1+\text{ط}_2)+\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ط}_1+\text{ط}_2)-\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ط}_1-\text{ط}_2)=0$$

ہے ناقص کو دوسرے دو نقطوں پر قطع کرتا ہے جنکو ملانیوالا خط

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ط}_1+\text{ط}_2)-\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ط}_1+\text{ط}_2)-\frac{\text{ا}^2+\text{ب}^2}{\text{ا}^2-\text{ب}^2}\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ط}_1-\text{ط}_2)=0$$

ہے۔

۷۳ — ثابت کرو کہ مخروطیوں $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^3}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^3}=\frac{1}{\text{ا}+\text{ب}}$ اور $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^3}-\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^3}=\frac{1}{\text{ا}-\text{ب}}$

ساتواں باب (۱۸۵)

قطع زائد

تعریف ۔ قطع زائد ایک نقطہ کا طریق ہوتا ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ (جس کو ماسکہ کہتے ہیں) سے اس کا فاصلہ ایک ثابت خط (جس کو مرتب کہتے ہیں) سے اُس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے جو اکائی سے بڑی ہوتی ہے ۔

۱۴۰ ۔ زائد کی مساوات معلوم کرنا ۔

فرض کرو کہ س ماسکہ اور ے م مرتب ہے ۔
س ے کو مرتب پر عمود کھینچو ۔
ے س کو ا پر اس طرح تقسیم کرو کہ س ا : ا ے = دی ہوئی نسبت = ز : ۱ تب ا منحنی پر کا ایک نقطہ ہے ۔
نیز س ے ممدودہ میں ایک نقطہ اَ ہوگا ایسا کہ

س اَ : ے اَ = ز : ۱

فرض کرو کہ ا اَ کا نقطہ وسطی ج ہے اور ا اَ = ۲ ا، تب

س ا = ز × ا ے، اور س اَ = ز × ے اَ

∴ س ا + س اَ = ز (ا ے + ے اَ)

∴ ۲ س ج = ۲ ز × ا ج

∴ ج س = ا ز، .... (۱)

نیز   س اَ - س ا = ز (ے اَ - ا ے)

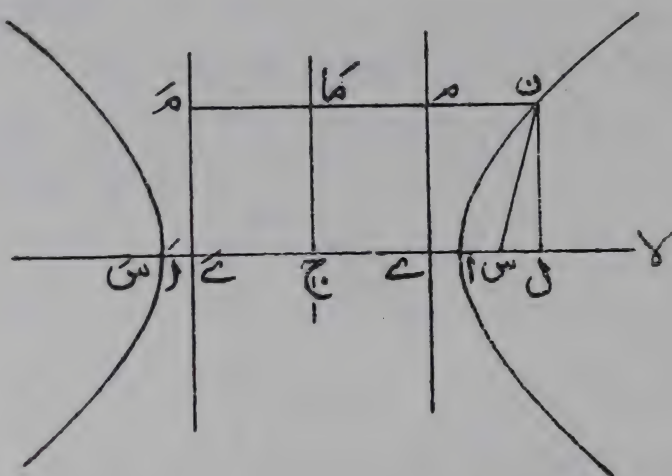
یا   ا اَ = ز (ا اَ - ۲ ا ے)

∴ ا ج = ز × ے ج

یا   ج ے = ا/ز، .... (۲)

(۱۸۶) اب فرض کرو کہ ج مبداء ہے، ج ا محور لا اور اس کے عمود وار خط محور ما۔

فرض کرو کہ منحنی کا کوئی نقطہ ن ہے اور اس کے محدد (لا، ما) ہیں۔



تب شکل میں،

س ن^2 = ز^2 ن م^2

∴ س ل^2 + ل ن^2 = ز^2 ے ل^2

اب   س ل = ج ل - ج س = لا - ا ز

اور   ے ل = ج ل - ج ے = لا - ا/ز

∴ (لا − ا ز)² + ما² = ز² (لا − ا/ز)²

یا ما² + لا² (۱ − ز²) = ا² (۱ − ز²)

یا لا²/ا² + ما²/(ا² (۱ − ز²)) = ۱ .... (۳)

چونکہ ز اکائی سے بڑا ہے اس لیے ا² (۱ − ز²) منفی ہے۔ اگر ہم ا² (۱ − ز²) کی بجائے − ب² رکھیں تو مساوات شکل

لا²/ا² − ما²/ب² = ۱ .... (۴)

اختیار کرتی ہے۔

(۱۸۷) وتر خاص وہ وتر ہے جو ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہوتا ہے۔ اس کا طول معلوم کرنے کے لیے ہمیں مساوات (۴) میں لا = ا ز رکھنا چاہیے چنانچہ

ما² = ب² (ز² − ۱) = ب⁴/ا² کیونکہ ب² = ا² (ز² − ۱)

پس نیم وتر خاص کا طول ب²/ا ہے۔

۱۴۱ — مساوات (۴) (دفعہ ۱۴۰) میں لا²، ا² سے کم نہیں ہو سکتا کیونکہ اگر ایسا ہو تو ما² منفی ہوگا۔ اِس لیے منحنی کا کوئی حصہ لا = − ا اور لا = ا کے درمیان واقع نہیں ہے۔

اگر لا > ا تو ما² مثبت ہوگا اور ما کی کسی مخصوص قیمت کیلئے لا کی دو مساوی مگر مختلف العلامت قیمتیں ہونگی۔ اس لیے محور ما منحنی کو دو متشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر محور لا پر نقطے س′، ئے ایسے لیے جائیں کہ ج س′ = س ج اور ج ئے = ے ج تو نقطہ س′ بھی منحنی کا ماسکہ ہوگا اور وہ خط جو ئے میں سے

گذرتے ہوئے ج ے پر عمود ہو تمناظر مرتب ہوگا۔

اگر منحنی پر کوئی نقطہ (لاَ، ماَ) ہو تو یہ ظاہر ہے کہ نقطہ (- لاَ، - ماَ) بھی منحنی پر ہوگا۔ لیکن نقطے (لاَ، ماَ) اور (- لاَ، - ماَ) ایک ایسے خط پر ہیں جو مبداء میں سے گذرتا ہے اور نیز یہ نقطے مبداء سے مساوی فاصلوں پر ہیں۔ اس لیے مبداء ہر اُس وتر کی تنصیف کرتا ہے جو اس میں گذرتا ہے اور اس لیے اس کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں۔

مساوات (۴) (دفعہ ۱۴۰) سے ظاہر ہے کہ اگر لاَ^{2} > ا^2 تو ماَ^{2} مثبت ہوگا اور جیسے لاَ^{2} بڑھیگا ماَ^{2} بھی بڑھیگا اور لا اور ما کے اس اضافہ کی کوئی حد نہیں ہے۔ پس منحنی کچھ ایسا ہے جو دفعہ ۱۴۰ کے نقشہ میں دکھایا گیا ہے اور وہ دو لامتناہی شاخوں پر مشتمل ہوتا ہے۔

ا اَ کو زائد کا قاطع محور کہتے ہیں۔ وہ خط جو ج میں سے گذرتے ہوئے ا اَ پر عمود ہے منحنی سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا، لیکن اگر اِس خط پر ب، بَ ایسے نقطے ہوں کہ ب ج = ج بَ = ب تو خط ب بَ کو مزدوج محور کہتے ہیں۔ (۱۸۸)

۱۴۲ — زائد پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلے معلوم کرنا۔

دفعہ ۱۴۰ کی شکل میں چونکہ س ن = ز × ن م اس لیے

$$\text{س ن} = \text{ز} \text{ ے ل} = \text{ز} (\text{ج ل} - \text{ج ے}) = \text{ز} (\text{لا} - \frac{\text{ا}}{\text{ز}}) = \text{ز لا} - \text{ا}$$

$$\text{نیز سَ ن} = \text{ز} \times \text{مَ ن} = \text{ز} (\text{ج ل} + \text{ےَ ج}) = \text{ز} (\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{ز}}) = \text{ز لا} + \text{ا}$$

$$\therefore \text{سَ ن} - \text{س ن} = ۲ \text{ ا}$$

۱۴۳ — زائد کی قطبی مساوات مرکز کو قطب قرار دیکر اس طرح معلوم

کی جا سکتی ہے کہ لا کی بجائے ر جم ط اور ما کی بجائے ر جب ط درج کیا جائے۔ چنانچہ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ میں اندراج کرنے سے

$$\frac{\text{ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{ط}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ر}^2\,\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{ب}^2} = 1$$

یا

$$\frac{1}{\text{ر}^2} = \frac{\text{جم}^2\,\text{ط}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{ب}^2}\text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کو شکل

$$\frac{1}{\text{ر}^2} = \frac{1}{\text{ا}^2} - \left(\frac{1}{\text{ا}^2} + \frac{1}{\text{ب}^2}\right)\text{جب}^2\,\text{ط}\text{،} \quad \ldots\ldots (2)$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ ط صفر ہو تو $\frac{1}{\text{ر}^2}$ بڑے سے بڑا ہوتا ہے یعنی ر کم سے کم جیسے جیسے ط بڑھتا ہے $\frac{1}{\text{ر}^2}$ گھٹتا ہے اور صفر ہوتا ہے جبکہ $\text{جب}^2\,\text{ط} = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$، اس لیے ط کی اس قیمت کے لیے ر لا متناہی ہے۔ اگر $\text{جب}^2\,\text{ط} > \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$ تو $\frac{1}{\text{ر}^2}$ منفی ہوگا اور اس لیے وہ سمتی نیم قطر جو محور کے ساتھ $\text{جب}^{-1}\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}}$ سے بڑا زاویہ بناتا ہے منحنی سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا۔

۱۴۴ — پچھلے باب کے بہت سے نتیجے زائد کے لیے بھی درست ہیں (۱۸۹)
اور جو ثبوت وہاں دئے گئے ہیں ان میں صرف ب^2 کی علامت کو بدلنے کی ضرورت ہے۔ اس لیے ہم صرف ان نتیجوں کو بیان کریں گے۔

فرض کرو کہ زائد کی مساوات

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} - \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = ۱$$

ہے -

(۱) خط $\text{ما} = \text{م لا} \pm \sqrt{\text{ا}^{2}\text{م}^{2} - \text{ب}^{2}}$ ، م کی تمام قیمتوں کے لیے مماس ہے [دفعہ ۱۱۴]

(۲) (لاَ ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^{2}} - \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^{2}} = ۱$$ ہے [دفعہ ۱۱۵]

(۳) (لاَ ، ماَ) کے قطبی کی مساوات

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^{2}} - \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^{2}} = ۱$$ ہے [دفعہ ۱۱۹]

(۴) (لاَ ، ماَ) پر کے عماد کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - \text{لاَ}}{\dfrac{\text{لاَ}}{\text{ا}^{2}}} = \frac{\text{ما} - \text{ماَ}}{-\dfrac{\text{ماَ}}{\text{ب}^{2}}}$$ ہے [دفعہ ۱۱۷]

(۵) خط ل لا + م ما - ن = ۰ منحنی کو مس کرے گا اگر $\text{ا}^{2}\text{ل}^{2} - \text{ب}^{2}\text{م}^{2} = \text{ن}^{2}$ [دفعہ ۱۱۶]

(۶) خط لا جم عہ + ما جب عہ = ع منحنی کو مس کرے گا اگر $\text{ع}^{2} = \text{ا}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{عہ} - \text{ب}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{عہ}$ [دفعہ ۱۱۶]

(۷) زائد کے مرتب دائرہ کی مساوات $\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} = \text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}$ ہے [دفعہ ۱۲۱]

مرتب دائرہ صریحاً خیالی ہوگا جبکہ ا < ب اور ایک نقطہ میں تحویل ہوگا جبکہ ا = ب

(۸) وہ ہندسی مسائل جو دفعہ ۱۲۶ میں ثابت کئے گئے ہیں زائد کیلئے بھی درست ہیں -

(۹) زائد کے اُن تمام وتروں کے نقاط وسطی کا طریق جو ما = م لا کے متوازی ہوں خطِ مستقیم ما = مَ لا ہے جہاں م مَ = $-\frac{ب^2}{ا^2}$ [دفعہ ۱۲۸]

(۱۹۰) **۱۴۵** — خطوط ما = م لا، ما = مَ لا مزدوج ہیں اگر

$$م\,مَ = \frac{ب^2}{ا^2}$$

یہ دو قطر منحنی سے ان نقطوں پر ملتے ہیں جن کے فصلے مساواتوں

$$لا^2\left(\frac{1}{ا^2} - \frac{م^2}{ب^2}\right) = 1، \quad \text{اور}\quad لا^2\left(\frac{1}{ا^2} - \frac{مَ^2}{ب^2}\right) = 1$$

سے حاصل ہوتے ہیں

پہلی مساوات سے لا کی حقیقی قیمتیں ملیں گی اگر م < $\frac{ب}{ا}$ اور

دوسری مساوات سے حقیقی قیمتیں ملیں گی اگر مَ < $\frac{ب}{ا}$ لیکن چونکہ م مَ = $\frac{ب^2}{ا^2}$ اس لیے م اور مَ دونوں $\frac{ب}{ا}$ سے کم نہیں ہو سکتے اور نہ دونوں $\frac{ب}{ا}$ سے بڑے ہو سکتے ہیں۔

اس لیے زائد کے دو مزدوج قطروں میں سے ایک اُس سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے اور دوسرا اُس سے خیالی نقطوں پر ملتا ہے۔

یہ دو مزدوج قطر منطبق ہونگے اگر م = $\pm\frac{ب}{ا}$

۱۴۶ — فرض کرو کہ مزدوج قطروں کے ایک زوج کے سرے ن، د ہیں۔ فرض کرو کہ ن کے محدد لاَ، ماَ اور د کے محدد لاً، ماً ہیں۔ دفعہ ۱۴۵ کی رُو سے اگر اِن میں سے ایک نقطہ حقیقی ہے تو دوسرا خیالی ہوگا۔

ج ن اور ج د کی مساواتیں

$$\frac{\text{ما}}{\text{ما}'} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}'} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ما}}{\text{ما}''} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}''}$$

ہیں۔ پس دفعہ ۱۴۴ (۹) سے

$$\frac{\text{لا}'\,\text{لا}''}{\text{ا}^{2}} - \frac{\text{ما}'\,\text{ما}''}{\text{ب}^{2}} = ۰، \quad \ldots\ldots\ (۱)$$

اس لیے

$$\frac{\text{لا}'^{2}\,\text{لا}''^{2}}{\text{ا}^{4}} = \frac{\text{ما}'^{2}\,\text{ما}''^{2}}{\text{ب}^{4}}$$

یا چونکہ (لا'، ما') اور (لا''، ما'') دونوں منحنی پر ہیں اس لیے (۱۹۱)

$$\frac{\text{لا}'^{2}}{\text{ا}^{2}}\left(۱ + \frac{\text{ما}''^{2}}{\text{ب}^{2}}\right) = \left(\frac{\text{لا}'^{2}}{\text{ا}^{2}} - ۱\right)\frac{\text{ما}''^{2}}{\text{ب}^{2}}$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{لا}'^{2}}{\text{ا}^{2}} = -\frac{\text{ما}''^{2}}{\text{ب}^{2}} \quad \therefore \text{لا}'' = \pm \frac{\text{ا}}{\text{ب}}\,\text{ما}'\sqrt{-۱}، \ \ldots\ (۲)$$

$$\text{اور} \ \therefore \ \text{ما}'' = \pm \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{لا}'\sqrt{-۱}، \ \ldots\ldots\ (۳)$$

(۲) اور (۳) سے

$$\text{ج ن}^{2} + \text{ج د}^{2} = \text{لا}'^{2} + \text{ما}'^{2} - \frac{\text{ا}^{2}}{\text{ب}^{2}}\text{ما}'^{2} - \frac{\text{ب}^{2}}{\text{ا}^{2}}\text{لا}'^{2}$$

$$= \text{ا}^{2}\left(\frac{\text{لا}'^{2}}{\text{ا}^{2}} - \frac{\text{ما}'^{2}}{\text{ب}^{2}}\right) - \text{ب}^{2}\left(\frac{\text{لا}'^{2}}{\text{ا}^{2}} - \frac{\text{ما}'^{2}}{\text{ب}^{2}}\right)$$

$$= \text{ا}^{2} - \text{ب}^{2}$$

اس لیے دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے جیسا کہ ناقص کی صورت میں بھی تھا۔

۱۴۷ — **تعریف**۔ متقارب وہ خطِ مستقیم ہے جو منحنی سے

لاتناہی پر کے دو نقطوں پر ملتا ہے لیکن یہ خط پورا کا پورا لاتناہی پر نہیں ہوتا۔

زائد کے متقارب معلوم کرنا

اُن نقطوں کے فصلے معلوم کرنے کے لیے جہاں خط مستقیم $\text{ما} = \text{م لا} + \text{ج}$ منحنی کو قطع کرتا ہے مساوات

$$\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{ا}^{\text{۲}}} - \frac{(\text{م لا} + \text{ج})^{\text{۲}}}{\text{ب}^{\text{۲}}} = \text{۱}$$

یا $$\text{لا}^{\text{۲}}\left(\frac{\text{۱}}{\text{ا}^{\text{۲}}} - \frac{\text{م}^{\text{۲}}}{\text{ب}^{\text{۲}}}\right) - \frac{\text{۲ م ج}}{\text{ب}^{\text{۲}}}\,\text{لا} - \frac{\text{ج}^{\text{۲}}}{\text{ب}^{\text{۲}}} - \text{۱} = \text{۰}، \quad \ldots (\text{۱})$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات کی دونوں اصلیں لاتناہی ہونگی اگر $\text{لا}^{\text{۲}}$ اور لا دونوں کے سر صفر ہوں یعنے

اگر $$\frac{\text{۱}}{\text{ا}^{\text{۲}}} - \frac{\text{م}^{\text{۲}}}{\text{ب}^{\text{۲}}} = \text{۰} \quad \text{اور م ج} = \text{۰}$$

پس $\text{ج} = \text{۰}$ اور $\text{م} = \pm \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ حاصل ہونا چاہئے (۱۹۲)

اس لیے زائد $$\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{ا}^{\text{۲}}} - \frac{\text{ما}^{\text{۲}}}{\text{ب}^{\text{۲}}} = \text{۱}$$

کے دو حقیقی متقارب ہیں جن کی مساواتیں $\text{ما} = \pm \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{لا}$ ہیں، یا ایک مساوات میں انھیں بیان کیا جائے تو

$$\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{ا}^{\text{۲}}} - \frac{\text{ما}^{\text{۲}}}{\text{ب}^{\text{۲}}} = \text{۰}، \quad \ldots\ldots (\text{۲})$$

ب، ب' میں سے قاطع محور کے متوازی اور ا، ا' میں سے مزدوج محور کے متوازی خطوط کھینچو، تب (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ متقارب اُس مستطیل کے وتر ہیں جو اس طرح بنتا ہے۔

ناقص کے کوئی حقیقی نقطے لاتناہی پر نہیں ہوتے اور اس لیے اس کے متقارب خیالی ہوتے ہیں۔

دفعہ ۱۴۵ سے ہم دیکھتے ہیں کہ ہر متقارب منطبق مزدوج قطروں کے ایک زوج پر واقع ہوتا ہے۔

۱۴۸ — کوئی خطِ مستقیم جو ایک متقارب کے متوازی ہو منحنی سے لاتناہی پر کے ایک نقطہ پر ملیگا۔

کیونکہ مساوات (۱) (دفعہ ۱۴۶) کی ایک اصل لامتناہی ہوگی اگر $لا^2$ کا سر صفر ہو۔ یہ صورت اسوقت ہوگی جبکہ $م = \pm \frac{ب}{ا}$۔ اس لئے خط

$ما = \pm \frac{ب}{ا} لا + ج$ منحنی سے لاتناہی پر کے ایک نقطہ پر ملیگا خواہ ج کی قیمت کچھ ہی ہو۔

۱۴۹ — اُس زائد کی مساوات جس کا قاطع محور ب بَ اور مزدوج محور ۲ اَ ہو

$$- \frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱ \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے۔ یہ زائد اور ابتدائی زائد جس کی مساوات

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱ \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

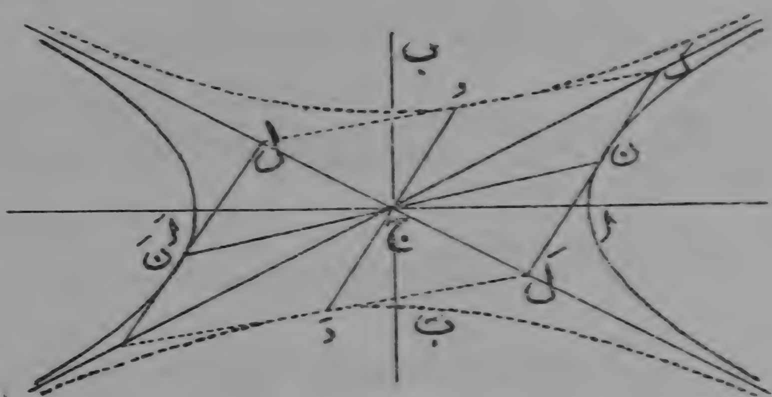
ہے ایک دوسرے کے مزدوج کہلاتے ہیں۔

(۱۹۳) ہم مزدوج زائدوں کے ایک زوج کے چند خواص ذیل میں درج کرتے ہیں:—

(۱) اِن دو زائدوں کے متقارب ایک ہی ہوتے ہیں۔

(۲) اگر دو قطر ایک زائد کے لحاظ سے مزدوج ہوں تو دوسرے کے لحاظ سے بھی مزدوج ہوں گے۔

(۳) زائدوں (۲) اور (۱) کی مساواتیں [دفعہ ۱۴۳] اشکال



$$\frac{1}{\text{ر}^2} = \frac{\text{جم}^2\,\text{ط}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{ب}^2}$$

$$-\frac{1}{\text{ر}^2} = \frac{\text{جم}^2\,\text{ط}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{ب}^2}$$

میں بھی لکھی جا سکتی ہیں۔ یہ ظاہر ہے کہ ط کی کسی قیمت کے لیے ر^2 ایک منحنی کے لیے مثبت اور دوسرے کے لیے منفی ہے۔

پس ہر قطر ایک منحنی سے حقیقی نقطوں پر اور دوسرے منحنی سے خیالی نقطوں پر ملتا ہے۔ اس کے علاوہ ان دو منحنیوں کے نیم قطروں کے طول، ط کی تمام قیمتوں کے لیے، رشتہ $\text{ر}_1^2 = -\text{ر}_2^2$ سے مربوط ہوتے ہیں۔

(۴) اگر دو مزدوج قطر منحنیوں (۲) اور (۱) کو علی الترتیب ن اور د پر قطع کریں تو

$$\text{ج ن}^2 - \text{ج د}^2 = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$$

فرض کرو کہ ن کے محدد لَ، مَ اور د کے محدد لً، مً ہیں۔

تب ج ن اور ج د کی مساواتیں

$$\frac{لا}{لاَ} - \frac{ما}{ماَ} = ۰ \quad اور \quad \frac{لا}{لاً} - \frac{ما}{ماً} = ۰$$

ہیں۔ مزدوج قطروں کی شرط $م\,مَ = \frac{ب^۲}{ا^۲}$ سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{لاَ\,لاً}{ا^۲} - \frac{ماَ\,ماً}{ب^۲} = ۰، \quad \ldots\ldots (۳)$$

یا

$$\frac{لاَ^۲\,لاً^۲}{ا^۴} = \frac{ماَ^۲\,ماً^۲}{ب^۴}$$

اور چونکہ (لاَ، ماَ) منحنی (۲) پر اور (لاً، ماً) منحنی (۱) پر ہے اسلیے

$$\frac{لاَ^۲}{ا^۲}\left(\frac{ماً^۲}{ب^۲} - ۱\right) = \frac{ماَ^۲}{ب^۲}\left(\frac{لاً^۲}{ا^۲} - ۱\right)$$

یا

$$\frac{لاً^۲}{ا^۲} = \frac{ماً^۲}{ب^۲}$$

$$\therefore \quad \frac{ماً}{ب} = \pm \frac{لاً}{ا}، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

اور اس لیے (۳) سے

$$\frac{لاَ}{ا} = \pm \frac{ماَ}{ب}، \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

پس $ج\,ن^۲ - ج\,د^۲ = لاَ^۲ + ماَ^۲ - لاً^۲ - ماً^۲$

$$= لاَ^۲ + ماَ^۲ - \frac{ا^۲}{ب^۲}\,ماَ^۲ - \frac{ب^۲}{ا^۲}\,لاَ^۲$$

$$= (ا^۲ - ب^۲)\left(\frac{لاَ^۲}{ا^۲} - \frac{ماَ^۲}{ب^۲}\right)$$

$$\therefore\ \text{ج ن}^2 - \text{ج د}^2 = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$$ [1]

(۵) وہ متوازی الاضلاع جو ن، نَ، د، دَ پر کے مماسوں سے بنتا ہے مستقل رقبہ کا ہوتا ہے۔

یہ متوازی الاضلاع ۴ ج ن × ج د × جب ن ج د کے مساوی یا ۴ ج د × ج ف کے مساوی ہے جہاں ج ف وہ عمود ہے جو ج سے ن پر کے مماس پر کھینچا گیا ہے۔

اب ن پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2} = 1$$

ہے۔ اسلئے

$$\text{ج ف}^2 = \frac{1}{\frac{\text{لاَ}^2}{\text{ا}^4} + \frac{\text{ماَ}^2}{\text{ب}^4}}$$

(۱۹۴) اور $\text{ج د}^2 = \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2}\,\text{ماَ}^2 + \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\,\text{لاَ}^2 = \text{ا}^2\text{ب}^2\left(\frac{\text{لاَ}^2}{\text{ا}^4} + \frac{\text{ماَ}^2}{\text{ب}^4}\right)$

اس لیے $\text{ج د} \times \text{ج ف} = \text{ا ب}$

(۶) متقارب، ن د اور ن دَ کی تنصیف کرتے ہیں۔

اگر ن د کے وسطی نقطہ کے محدد لا، ما ہوں تو

$$2\,\text{لا} = \text{لاَ} + \text{لاً} \quad \text{اور} \quad 2\,\text{ما} = \text{ماَ} + \text{ماً}$$

$$\therefore\ \frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \frac{\text{لاَ} + \text{لاً}}{\text{ماَ} + \text{ماً}} = \frac{\text{لاَ} \pm \text{ماَ}\frac{\text{ا}}{\text{ب}}}{\text{ماَ} \pm \text{لاَ}\frac{\text{ب}}{\text{ا}}} = \pm\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

---

[1] ج ن اور ج د کو مزدوج نیم قطر نہیں سمجھنا چاہئے کیونکہ نقطے ن اور د ایک ہی زائد پر نہیں ہیں۔ خط د ج دَ ابتدائی زائد کو دو خیالی نقطوں پر قطع کرتا ہے اور اگر یہ نقطے ذ، ذَ ہوں تو (۳) سے $\text{ج ذ}^2 = -\,\text{ج د}^2$

اس لیے ن د اور ن دَ کے نقاط وسطی حسب ذیل خطوں میں سے ایک یا دوسرے پر ہیں:

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \pm \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

نیز چونکہ ج ن ک د ایک متوازی الاضلاع ہے اس لیے ج ک، ن د یا ن دَ کی تنصیف کرتا ہے اور اس لیے وہ متقاربوں میں سے ایک ہے، اس لیے د، دَ پر کے مماس، د اور دَ پر کے مماسوں سے متقاربوں پر ملتے ہیں۔

(۷) زائدوں (۲) اور (۱) کے لحاظ سے (لاَ، ماَ) کے قطبیوں کی مساواتیں علی الترتیب

$$\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2} = 1 \quad \text{اور} \quad - \frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2} = 1$$

ہیں۔ اس لیے ان منحنیوں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی ایک دوسرے کے متوازی اور مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

اگر (۲) پر کوئی نقطہ (لاَ، ماَ) ہو تو (۱) کے لحاظ سے اس نقطہ کا قطبی

$$- \frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2} = 1 \text{، یا} \quad \frac{\text{لا(} - \text{لاَ)}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما(} - \text{ماَ)}}{\text{ب}^2} = 1$$

ہے۔ لیکن یہ آخری مساوات نقطہ (− لاَ، − ماَ) پر (۲) کے مماس کی مساوات ہے اور یہ نقطہ، ن میں سے گذرنیوالے قطر کا دوسرا سرا ہے۔

پس اگر ایک زائد کے کسی نقطہ سے مزدوج زائد کے دو مماس ن ق، ن قَ کھینچے جائیں تو خط ق قَ ابتدائی زائد کو ن میں سے گذرنے والے قطر کے دوسرے سرے پر مس کرے گا۔

۱۵۰ — مزدوج قطروں کے کسی زوج کو محاور قرار دیکر زائد کی

مساوات معلوم کرنا۔

زائد کے قاطع محور اور مزدوج محور کے حوالے سے زائد کی مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$$

ہے۔ چونکہ استحالہ میں مبدا کا مقام تبدیل نہیں ہوتا اس لیے استحالہ شدہ مساوات کو حاصل کرنے کے لیے مساوات بالا میں لا، ما کی بجائے شکل ل لا + م ما، لَ لا + مَ ما کے جملے درج کرنا ہونگے [دفعہ ۱۵]۔

پس زائد کی مساوات شکل

$$\text{ا لا}^2 + \text{ب ما}^2 + 2\,\text{ھ لا ما} = 1 \text{،} \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

کی ہوگی۔

بموجب فرض محور لا اُن وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو محور ما کے متوازی ہیں۔ اس لیے لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے (۱) سے معلوم کردہ ما کی دو قیمتیں مساوی اور مختلف العلامت ہونی چاہئیں۔ اس لئے ھ = ۰۔ اور اس لیے مساوات کی شکل

$$\text{ا لا}^2 + \text{ب ما}^2 = 1 \text{،} \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

ہوگی۔

دو نیم مزدوج قطروں میں سے ایک حقیقی ہے اور دوسرا خیالی۔ اگر اِن کے طول اَ اور $\sqrt{-1}$ بَ ہوں تو چونکہ یہ طول محاور لا اور ما پر کے تقطیعے ہیں اس لیے (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا اَ}^2 = 1 = -\text{ب بَ}^2$$

اس لیے مطلوبہ مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{اَ}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{بَ}^2} = 1 \text{،} \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

ہے۔

۱۵۱ — چونکہ منحنی کی مساوات کی شکل وہی رہتی ہے جو پہلے تھی اِس لیے

وہ تمام تحقیقاتیں جن میں یہ فرض نہیں کیا گیا تھا کہ محاور ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اب بھی درست رہتی ہیں۔ مثلاً دفعہ ۱۴۴ کی مساواتیں (۱)، (۲)، (۳)، (۵) اور (۹) میں کسی تبدیلی کی ضرورت نہیں۔ دفعہ ۱۴۷ میں بھی کوئی تبدیلی نہیں کرنی پڑے گی چنانچہ زائد کے متقاربوں کی مساوات $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۰$ حاصل ہوگی جبکہ زائد کی مساوات $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ ہو۔

مثال ۱ — $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے لحاظ سے $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ پر کے (۱۹۷)
کسی نقطہ کا قطبی، $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کو مس کریگا۔

مثال ۲ — اگر $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے لحاظ سے نقطوں (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) کے قطبی ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو $\frac{لا_۱ لا_۲}{ما_۱ ما_۲} + \frac{ا^4}{ب^4} = ۰$۔

مثال ۳ — اگر $ما^2 - ۴ ا لا = ۰$ کے لحاظ سے نقطہ (ع، بہ) کا قطبی $لا^2 + ما^2 - ۴ ا^2 = ۰$ کو مس کرے تو نقطہ (ع، بہ) قائم زائد $لا^2 - ما^2 - ۴ ا^2 = ۰$ پر ہوگا۔

مثال ۴ — ایک دائرہ دو ثابت عمود وار خطوں کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ ہر ایک مقطوعہ معلومہ طول کا ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

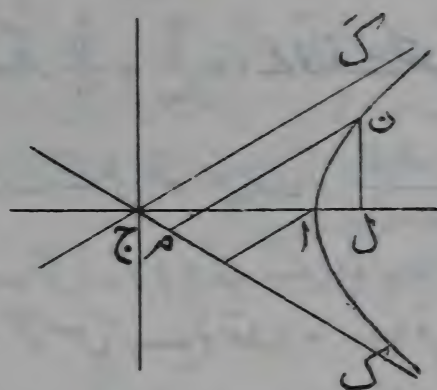
مثال ۵ — $ما^2 - ۴ ا لا = ۰$ کے لحاظ سے $لا^2 + ما^2 - ا^2 = ۰$ کے مماسوں کے قطب زائد $۴ لا^2 - ما^2 = ۴ ا^2$ پر واقع ہوں گے۔
نیز $ما^2 - ۴ ا لا = ۰$ کے لحاظ سے $۴ لا^2 - ما^2 = ۴ ا^2$ کے مماسوں کے قطب دائرہ $لا^2 + ما^2 = ا^2$ پر واقع ہونگے۔

۱۵۲ — زائد کے متقاربوں کو محددوں کے محور قرار دیکر اِنکے

حوالے سے زائد کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ شکل میں متقارب ج کُ، ج کَ ہیں اور فرض کرو کہ زاویہ ا ج کَ = ع اس لیے مس ع = $\frac{ب}{ا}$ ۔

فرض کرو کہ منحنی کا کوئی نقطہ (لا، ما) ن ہے اور فرض کرو کہ ن کے محدد ج کُ اور ج کَ کے حوالے سے لاَ، ماَ ہیں۔ ن م کو ج کَ سے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ ج کُ سے م پر ملتا ہے۔ ن ل کو قاطع محور پر عمود کھینچو۔



(۱۹۸) تب ج م = لاَ، م ن = ماَ، ج ل = لا، ل ن = ما

اب ج ل = ج م جم ع + م ن جم ع

یا　لا = (لاَ + ماَ) جم ع، . . . . (۱)

نیز ل ن = م ن جب ع - ج م جب ع

یا　ما = (ماَ - لاَ) جب ع، . . . . (۲)

پس مساوات

$$\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} - \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$$

میں ابدال کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{جم}^{2}\text{ع}\,(\text{لاَ}+\text{ماَ})^{2}}{\text{ا}^{2}}-\frac{\text{جب}^{2}\text{ع}\,(\text{ماَ}-\text{لاَ})^{2}}{\text{ب}^{2}}=1 \text{،} \ldots\ldots (3)$$

لیکن مس ع $=\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ ، اسلیے $\frac{\text{جب}^{2}\text{ع}}{\text{ب}^{2}}=\frac{\text{جم}^{2}\text{ع}}{\text{ا}^{2}}=\frac{1}{\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}}$ ، اِس لیے زبروں کو اُڑا دینے سے (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$4\,\text{لا}\,\text{ما}=\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}$$

اور یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

متقاربوں کے حوالے سے مزدوج زائد کی مساوات

$$4\,\text{لا}\,\text{ما}=-(\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2})$$

ہوگی۔

۱۵۳ — زائد، متقارب، اور مزدوج زائد کی مساواتیں علی الترتیب

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}}-\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}}=1\text{،}\quad \frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}}-\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}}=0\text{،}\ \text{اور}\ \frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}}-\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}}=-1$$

ہیں۔

اگر محددوں کے محوروں کو کسی طریقہ پر تبدیل کیا جائے تو نئی مساواتیں حاصل کرنے کے لیے ہمیں تینوں صورتوں میں وہی اندراجات عمل میں لانے چاہئیں۔

پس محددوں کے محوروں کے تمام محلوں کے لیے زائد کی مساوات اور مزدوج زائد کی مساوات میں جو دو مستقلات شامل ہوتے ہیں وہ مساوی اور مختلف العلامت ہوتے ہیں اور اِن مساواتوں اور متقاربوں کی مساوات میں جو فرق ہے وہ صرف مستقلوں کا ہے۔

۱۵۴ — جب ایک زائد کے متقاربوں کے درمیان قائمہ زاویہ (199)
ہوتا ہے تو زائد کو **قائم زائد** کہتے ہیں۔

زائد کے متقاربوں کے درمیان زاویہ ۲ مس$^{-1}$ $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ کے مساوی ہوتا ہے اور اس لیے جب یہ زاویہ قائمہ ہوتو ب = ا۔ اسی سبب کی بناء پر بعض اوقات اس منحنی کو مساوی الحاد زائد کہتے ہیں۔

۱۵۵ — زائد لاما = ج^{2} کے کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنا۔

نقطہ $(\text{ج ع}، \frac{\text{ج}}{\text{ع}})$ صریحاً لاما - ج^{2} = ۰ پر ہے خواہ ع کی قیمت کچھ ہی ہو۔ اِس نقطہ کو 'ع' سے موسوم کرو۔

تب دو نقطوں ع$_1$، ع$_2$ کو ملانے والا خط

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & 1 \\ \text{ج ع}_1 & \frac{\text{ج}}{\text{ع}_1} & 1 \\ \text{ج ع}_2 & \frac{\text{ج}}{\text{ع}_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

یعنی $\text{لا}\left(\frac{1}{\text{ع}_1} - \frac{1}{\text{ع}_2}\right) + \text{ما}(\text{ع}_2 - \text{ع}_1) + \text{ج}\left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} - \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_1}\right) = 0$

ہے۔ اس لیے ع$_1$ - ع$_2$ سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} + \text{ما ع}_1\text{ع}_2 - \text{ج}(\text{ع}_1 + \text{ع}_2) = 0، \quad \ldots\ldots (1)$$

اب رکھو ع$_2$ = ع$_1$ تو ع$_1$ پر کے مماس کی مساوات

$$\text{لا} + \text{ما ع}_1^2 - 2\,\text{ج ع}_1 = 0، \quad \ldots\ldots (2)$$

حاصل ہوگی۔

(۲) سے

$$\frac{\text{لا ج}}{\text{ع}_1} + \text{ما ج ع}_1 = \text{۲ ج}^2$$

یا $\text{لا ہا}_1 + \text{ما لا}_1 = \text{۲ ج}^2$ ، . . . . (۳)

مساوات (۳) کو استعمال کر کے دفعہ ۱۱۹ کی طرح ہم معلوم کرتے ہیں کہ $\text{لا ما} - \text{ج}^2 = ۰$ کے لحاظ سے نقطہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ کے قطبی کی مساوات

$$\text{لا ہا}_1 + \text{ما لا}_1 = \text{۲ ج}^2$$

ہے۔

مساوات (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مخروطی قائم زائد ہے تو ع_1 پر کے عماد کی مساوات

$$(\text{لا} - \text{ج ع}_1)\text{ع}_1^2 - (\text{ما} - \frac{\text{ج}}{\text{ع}_1}) = ۰$$

یا $\text{لا ع}_1^3 - \text{ع}_1 \text{ما} - \text{ج ع}_1^4 + \text{ج} = ۰$ ، . . . . . . (۴)

ہے۔

(۲۰۰) مثال ۱- $\text{لا ما} = \text{ج}^2$ میں ایک مثلث بنایا گیا ہے جس کے دو ضلع علی الترتیب $\text{ما} + \text{م}_1 \text{لا} = ۰$ اور $\text{ما} + \text{م}_2 \text{لا} = ۰$ کے متوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ تیسرا ضلع زائد $\text{۴ م}_1 \text{م}_2 \text{لا ما} = \text{ج}^2 (\text{م}_1 + \text{م}_2)^2$ کو لف کرتا ہے۔

$\text{ع}_1 ، \text{ع}_2$ کو ملانے والا خط

$$\text{لا} + \text{ما ع}_1 \text{ع}_2 - \text{ج} (\text{ع}_1 + \text{ع}_2) = ۰$$

ہے۔ یہ خط، ما + م۱ لا = ۰ کے متوازی ہوگا اگر م۱ ع۱ ع۲ = ۱۔

اسی طرح ع۱، ع۳ کو ملانیوالا خط، ما + م۲ لا = ۰ کے متوازی ہے اگر م۲ ع۱ ع۳ = ۱

پس م۱ ع۲ = م۲ ع۳، .... (۱)

اب ع۲، ع۳ کو ملانے والا خط

لا + ما ع۲ ع۳ − ج (ع۲ + ع۳) = ۰

ہے، یا (۱) سے م۱ لا + ما م۲ ع۳² − ج (م۲ + م۱) ع۳ = ۰

اس کا لفاف، ع۳ کی مختلف قیمتوں کے لیے،

۴ م۱ م۲ لا ما = ج² (م۱ + م۲)²

ہے۔

مثال ۲ — کوئی خطِ مستقیم ایک زائد کو نقطوں ق اور قَ پر اور اس کے متقاربوں کو نقطوں سا اور سَا پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ق قَ اور سا سَا کے وسطی نقطے ایک ہی ہیں۔

مثال ۳ — ایک زائد کے کسی مماس کا وہ حصہ جو متقاربوں کے درمیان منقطع ہوتا ہے نقطہ تماس پر تنصیف ہوتا ہے۔

مثال ۴ — ایک زائد کا کوئی مماس متقاربوں سے ایک ایسا مثلث قطع کرتا ہے جس کا رقبہ مستقل ہوتا ہے۔

مثال ۵ — ثابت کرو کہ خطوط ما − م لا = ۰ اور ما + م لا = ۰، م کی تمام قیمتوں کے لیے زائد لا ما = ج² کے مزدوج قطر ہیں۔

مثال ۶ — ثابت کرو کہ خط لا = ۰، زائد ۲ لا ما + ۳ لا² + ۴ لا = ۹ کا ایک متقارب ہے۔

دوسرے متقارب کی مساوات کیا ہے؟

مثال ۷ — لا ما − ۳ لا − ۲ ما = ۰ کے متقارب معلوم کرو۔

مزدوج زائد کی مساوات کیا ہے؟

مثال ۸۔ اُس مثلث کے حائط دائرہ کے مرکز کا طریق جو ایک دئے ہوئے زائد کے کسی مماس اور متقاربوں سے بنتا ہے دُوسرا زائد ہوتا ہے جس کے متقارب دئے ہوئے زائد کے متقاربوں پر عمود ہوتے ہیں۔

مثال ۹۔ اگر $ما^2 - ۴ ا لا = ۰$ کے لحاظ سے (عہ، بہ) کا قطبی $لا^2 - ۴ ب ما = ۰$ کو مس کرے تو (عہ، بہ) کو قائم زائد $لا ما + ۲ ا ب = ۰$ پر ہونا چاہیئے۔

مثال ۱۰۔ اگر ایک دئے ہوئے خط کے متوازی ہم محور دائروں کے ایک نظام کے مماس کھینچے جائیں تو اِن کے نقاطِ تماس ایک قائم زائد پر ہونگے۔

(۲۰۱) مثال ۱۱۔ ثابت کرو کہ ہم محور دائروں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک معلوم خط کے قطبیوں کا طریق ایک زائد ہے جس کا ایک متقارب دائروں کے مرکزوں کے خط پر عمود ہے اور دوسرا متقارب دئے ہوئے خط پر عمود ہے۔

۱۵۶۔ زائد کے متقارب اور مزدوج قطروں کا کوئی زوج موسیقی پینسل بناتے ہیں۔

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب} = ۰ \quad \text{متقارب}$$

اور مزدوج قطر کا کوئی زوج $ب^2 لا^2 + ۲ک لا ما + ا^2 ما^2 = ۰$

ہیں۔ دفعہ ۵۸ کی شرط صریحًا پوری ہوتی ہے۔

۱۵۷۔ ہم زائد کے کسی نقطہ کے محددوں کو ایک واحد مبدل کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں جیسا کہ ناقص کی صورت میں کیا گیا تھا۔ چنانچہ ہم رکھ سکتے ہیں $لا = ا$ قط طہ اور $ما = ب$ مس طہ کیونکہ طہ کی تمام قیمتوں کے لیے $قط^2 طہ - مس^2 طہ = ۱$۔

اگر منحنی کے کسی نقطہ ن کا معین ن ل ہو اور ل سے

امدادی دائرہ کا مماس ل ق ہو تو ج ل = ا قط ا ج ق - اسلئے
ا ج ق زاویہ ط ہے -

نقطوں $ط_۱$، $ط_۲$ میں سے گزرنے والے وتر کی مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & ۱ \\ \text{ا قط } ط_۱ & \text{ب مس } ط_۱ & ۱ \\ \text{ا قط } ط_۲ & \text{ب مس } ط_۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \quad \text{ہے اسلیے} \quad \begin{vmatrix} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} & \frac{\text{ما}}{\text{ب}} & ۱ \\ ۱ & \text{جب } ط_۱ & \text{جم } ط_۱ \\ ۱ & \text{جب } ط_۲ & \text{جم } ط_۲ \end{vmatrix} = ۰$$

اس لیے حسب دفعہ ۱۲۳

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}(ط_۱ - ط_۲) = \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب}\,\tfrac{۱}{۲}(ط_۱ + ط_۲) + \text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}(ط_۱ + ط_۲)\text{،} \quad \ldots (۱)$$

∴ $ط_۱$ پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{جم}\,ط_۱ + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب}\,ط_۱\text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہے - نیز $ط_۱$ پر کا عماد

$$\text{ا}\left(\text{لا} - \frac{\text{ا}}{\text{جم}\,ط_۱}\right) + \text{ب}\left(\text{ما} - \text{ب مس}\,ط_۱\right) \Big/ \text{جب}\,ط_۱ = ۰$$

یا

$$\text{ا لا} + \frac{\text{ب ما}}{\text{جب}\,ط_۱} = \frac{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}{\text{جم}\,ط_۱}\text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

ہے -

مثال - اگر چار نقطوں (ا قط $ط_۱$، ب مس $ط_۱$) وغیرہ پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں تو ثابت کرو کہ

$$ط_۱ + ط_۲ + ط_۳ + ط_۴ = (۲\text{ن} + ۱)\pi$$

اور $\text{جب}\,(\text{طہ}_1+\text{طہ}_2)+\text{جب}\,(\text{طہ}_2+\text{طہ}_3)+\text{جب}\,(\text{طہ}_3+\text{طہ}_1)=0$ [حسب دفعہ ۱۳۹]

۱۵۸ — ایک ناقص یا زائد کی مساوات کو جبکہ راس کو مبداء قرار دیا جائے (۲۰۲

اُس مساوات میں لا کی بجائے لا - ا لکھ کر معلوم کیا جا سکتا ہے جو مرکز کو مبداء لینے سے معلوم کیا جا چکی ہے - چنانچہ یہ مساوات ہوگی

$$\frac{(\text{لا}-\text{ا})^2}{\text{ا}^2}\pm\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1$$

یا
$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}\pm\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}-\frac{2\,\text{لا}}{\text{ا}}=0 \quad \ldots\ldots (1)$$

اب اگر راس سے قریبی ماسکہ کا فاصلہ ثابت رہے (فرض کرو ف) اور خروج المرکز اکائی ہو جائے تو منحنی ایک مکافی ہو جائے گا جس کا وتر خاص ۴ف ہوگا -

مکافی کی مساوات کو (۱) سے معلوم کیا جا سکتا ہے - چونکہ ا (۱-ز) = ف، اس لیے ا لامتناہی ہونا چاہیئے جبکہ ز = ۱ - نیز ا (۱ - ز^2) = ف (۱ + ز) = ۲ف اس لیے $\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}}=2\,\text{ف}$ - پس (۱) سے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}}\pm\frac{\text{ما}^2}{2\,\text{ف}}-2\,\text{لا}=0$$

یا چونکہ ا لامتناہی ہے

$$\text{ما}^2=\pm 4\,\text{ف}\,\text{لا}$$

اِس لیے مکافی ایک ناقص یا زائد کی انتہائی شکل ہے جس کا وتر خاص محدود ہے لیکن محور اعظم اور محور اصغر لامتناہی ہیں اور مرکز اور دوسرا ماسکہ لامتناہی پر ہیں -

مکافی کے خواص کو ناقص یا زائد کے خواص سے اخذ کرنا طالب علم کے لیے بہت مفید ہوگا -

۱۵۹ — فرض کرو کہ ایک مخروطی کا ماسکہ مرتب پر ہے۔
ماسکہ کو مبدا، قرار دو اور فرض کرو کہ مرتب محور ما ہے، تب مخروطی کی مساوات ہوگی

$$لا^2 + ما^2 = ز^2 \, لا^2$$

یا $$لا^2 (1 - ز^2) + ما^2 = 0$$

یہ مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو حقیقی ہونگے اگر ز اکائی سے بڑا ہو، منطبق ہونگے اگر ز اکائی کے مساوی ہو، اور خیالی ہونگے اگر ز اکائی سے کم ہو۔ (۲-۳)

پس ہمیں نہ صرف ناقص، مکافی اور زائد کو ہی مخروطیاں سمجھنا چاہیئے بلکہ دو حقیقی یا خیالی خطوطِ مستقیم کو بھی۔
یہ ذہن نشیں رہے کہ ایک دائرہ کا مرتب لامتناہی فاصلہ پر ہوتا ہے، نیز دو متوازی خطوطِ مستقیم کے ماسکے اور مرتب سب کے سب لامتناہی پر ہوتے ہیں۔

ساتویں باب پر مثالیں

۱— ا و ب، ج و د دو خطوطِ مستقیم ہیں جو ایک دوسرے کو علی القوائم تنصیف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ ن کا طریق جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ن ا × ن ب = ن ج × ن د، ایک قائم قطع زائد ہے۔

۲— ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خطِ مستقیم کھینچا گیا ہے جو ثابت خطوطِ مستقیم و لا، و ما کو علی الترتیب ر، ر' پر قطع کرتا ہے۔ خط ر ن ر' پر ایک نقطہ ن' لیا گیا ہے ایسا کہ ر ن = ن' ر'۔ ثابت کرو کہ ن' کا طریق ایک زائد ہے جس کے متقارب و لا، و ما ہیں۔

۳— ایک خطِ مستقیم کے سرے دو ثابت خطوطِ مستقیم پر ہیں اور وہ

ایک ثابت نقطہ میں سے بھی گذرتا ہے۔ خط کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو۔

۴ — ایک خطِ مستقیم کے سرے دو ثابت خطوطِ مستقیم پر ہیں اور وہ اِن سے مستقل رقبہ کا ایک مثلث قطع کرتا ہے۔ خط کے نقطہ وسطی کا طریق معلوم کرو۔

۵ — و ا اور و ب دو ثابت خطوطِ مستقیم ہیں اور ن کوئی نقطہ ہے۔ ن سے و ا اور و ب پر عمود ن م اور ن ل ہیں۔ ن کا طریق معلوم کرو اگر ذو اربعۃ الاضلاع و م ن ل مستقل رقبہ کا ہو۔

۶ — ایک قائم قطع زائد کے مرکز سے کسی نقطہ کا فاصلہ اُس عمودی فاصلہ کے بالعکس متناسب ہوتا ہے جو نقطہ کے قطبی کا زائد کے مرکز سے ہے

۷ — ایک زائد کے نقطہ ن کا معین ن ل ہے اور ن گ عماد ہے جو محور سے گ پر ملتا ہے۔ اگر ل ن کو خارج کیا جائے اور وہ متقارب سے ق پر ملے تو ثابت کرو کہ ق گ متقارب کے علی القوائم ہے

۸ — اگر ایک زائد اور اس کے مزدوج زائد کے خروج المرکز ز، ز' (۲۰۴
ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ز^2} + \frac{1}{ز'^2} = 1$$

۹ — وہ دو خطوطِ مستقیم جو اُن نقطوں کو ملاتے ہیں جن پر ایک زائد کے کوئی دو مماس متقاربوں سے ملتے ہیں مماسوں کے وترِ تماس کے متوازی اور اس سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

۱۰ — ثابت کرو کہ ایک زائد کے کسی نقطہ پر کے مماس کا وہ حصہ جو نقطہ تماس اور قاطع محور کے درمیان منقطع ہوتا ہے اُن عمودوں کے طولوں کے درمیان موسیقی اوسط ہے جو ماسکوں سے اُس نقطہ پر کے عماد پر کھینچے گئے ہوں۔

۱۱ — اگر کسی نقطہ و میں سے خط و ن ق کو ایک زائد کے ایک متقارب کے متوازی کھینچا گیا ہو اور یہ خط زائد کو ن پر اور و کے قطبی کو ق پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ن، و ق کا نقطہ وسطی ہے۔

۱۲ — ایک متوازی الاضلاع کو اِس طرح بنایا گیا ہے کہ اس کے اضلاع

ایک زائد کے متقاربوں کے متوازی ہیں اور اس کا ایک وتر زائد کا ایک وتر ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرے وتر کی سمت مرکز میں سے گذرے گی۔

۱۳ — ایک قائم زائد کے راس اُ، اَ ہیں اور اس پر کوئی نقطہ ن ہے۔ ثابت کرو کہ زاویہ ا ن اَ کے داخلی اور خارجی ناصف متقاربوں کے متوازی ہیں۔

۱۴ — ایک دائرہ کے ایک ثابت قطر کے سرے اُ، اَ ہیں اور اس قطر کے عمود وار کسی وتر کے سرے ن، نَ ہیں۔ ثابت کرو کہ ا ن اور اَ نَ کے نقطہ تقاطع کا طریق قائم قطع زائد ہے۔

۱۵ — ایک زائد کے متقاربوں کو حوالے کے محاور قرار دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ زائد کے دو مماسوں کے نقطہ تقاطع کے محدد نقاط تماس کے محددوں کے درمیان موسیقی اوسط ہیں۔

۱۶ — ایک زائد کے کسی نقطہ سے دوسرے زائد کے مماس کھینچے گئے ہیں جس کے متقارب وہی ہیں۔ ثابت کرو کہ وتر تماس متقاربوں سے ایک مستقل رقبہ قطع کرتا ہے۔

۱۷ — وہ خطوط مستقیم جو ایک مساوی المحاور زائد کے کسی نقطہ سے کسی قطر کے سروں تک کھینچے گئے ہوں متقاربوں کے ساتھ مساوی المیلان ہوتے ہیں۔

(۲-۵) ۱۸ — قائم زائد لا^{2} − ما^{2} = اُ^{2} کے عمادی وتروں کے نقاط وسطی کا طریق (ما^{2} − لا^{2})^{3} = ۴ اُ^{2} لا^{2} ما^{2} ہے۔

۱۹ — مخروطیوں کے ایک نظام کے صدر محاور دو دئے ہوئے خطوطِ مستقیم پر ہیں اور یہ تمام مخروطی ایک دئے ہوئے نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خط کے قطب ایک قائم زائد پر واقع ہوتے ہیں۔

۲۰ — مخروطیوں کے ایک نظام کے صدر محاور دو دئے ہوئے خطوطِ مستقیم پر ہیں اور یہ سب مخروطی ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کو مس کرتے

ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطبیوں کا لفاف ایک مکافی ہے۔

۲۱ — دو خطوط لا ۔ عہ = ۰، ما ۔ بہ = ۰ زائد لا ما = ج² کے لحاظ سے مزدوج ہیں (یعنی ہر خط دوسرے کے قطب میں سے گذرتا ہے)۔ ثابت کرو کہ (عہ، بہ) زائد لا ما ۔ ۲ ج² = ۰ پر ہے۔

۲۲ — ایک دائرہ ایک زائد کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ایک متقارب سے اِن چار نقاط تقاطع کے فاصلوں کا حاصل ضرب، دوسرے متقارب سے ان کے فاصلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۲۳ — ثابت کرو کہ اگر ایک قائم قطع زائد ایک دائرہ کو چار نقطوں پر قطع کرے تو اِن چار نقطوں کے اوسط محل کا مرکز متعینوں کے مرکزوں کے درمیان وسط میں ہے۔

۲۴ — اگر ایک قائم زائد پر چار نقطے لئے جائیں ایسے کہ کسی دو کو ملانے والا وتر دوسرے دو کو ملانے والے وتر پر عمود ہو اور اگر عہ، بہ، جہ، ضہ، کسی ایک متقارب کے ساتھ اُن خطوطِ مستقیم کے میلان ہوں جو اِن نقطوں کو مرکز سے علی الترتیب ملانے سے حاصل ہوتے ہیں تو ثابت کرو کہ مس عہ مس بہ × مس جہ مس ضہ = ۱

۲۵ — زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے وتروں کا ایک سلسلہ اُس دائرہ کے مماس ہیں جو زائد کے راسوں کو ملانے والے خط کو قطر مان کر کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ زائد کے لحاظ سے اِن وتروں کے قطبوں کا طریق $\frac{لا^2}{ا^4} + \frac{ما^2}{ب^4} = \frac{1}{ا^2 + ب^2}$ ہے۔

۲۶ — اگر دو خطوطِ مستقیم ثابت نقطوں میں سے گذریں اور ان کے درمیانی زاویہ کا ناصف ہمیشہ ایک ثابت خط کے متوازی رہے تو ثابت کرو کہ خطوط کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

۲۷ — ثابت کرو کہ ایک زائد کے مزدوج قطروں کے زوج کسی خطِ مستقیم

سے در میان میں منقطع ہوتے ہیں۔

۲۸ — ایک مثلث کے دو اضلاع اب، اج کو وتر مان کر ان پر دو مساوی دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دائروں کے تقاطع کا طریق ایک قائم زائد ہے جس کا مرکز ب ج کا نقطہ وسطی ہے اور جو ا، ب، ج میں سے گذرتا ہے۔

۲۹ — نصف قطر ر کا ایک دائرہ ایک قائم زائد کو جس کا مرکز ج ہے چار نقطوں ف، ق، ر، س پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\text{ج ف}^2 + \text{ج ق}^2 + \text{ج ر}^2 + \text{ج س}^2 = ۴\,\text{ر}^2$

۳۰ — اگر قائم زائد لا ما = ج^2 کے نقطوں $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$، $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$، $(\text{لا}_3، \text{ما}_3)$، $(\text{لا}_4، \text{ما}_4)$ پر کے عماد نقطہ (عہ، بہ) پر ملیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{عہ} = \text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3 + \text{لا}_4 \quad \text{اور} \quad \text{بہ} = \text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \text{ما}_3 + \text{ما}_4$$

$$\text{نیز} \quad \text{لا}_1\text{لا}_2\text{لا}_3\text{لا}_4 = \text{ما}_1\text{ما}_2\text{ما}_3\text{ما}_4 = -\text{ج}^4$$

۳۱ — ایک قائم زائد کے نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد زائد کے ایک نقطہ س پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ زائد کا مرکز مثلث ف ق ر کا مرکزِ ہندسی ہے۔

۳۲ — اگر ایک قائم زائد کے نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد ایک نقطہ پر متقاطع ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ ف ق ر اُس قطر کے دوسرے سرے میں سے گذرے گا جو س میں سے گذرتا ہے۔

۳۳ — قائم قطعات زائد کے ایک سلسلہ کو جن کے متقارب لا ما = ۰ ہیں خط ما = ک نقطوں ف_1، ق_1، ف_2، ق_2 وغیرہ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف_1، ق_1 وغیرہ پر کے عماد مکافی $\text{لا}^2 - ۴\,\text{ک}\,(\text{ما} - \text{ک}) = ۰$ کو مس کرتے ہیں۔

۳۴ — قائم زائد لا ما = ج^2 میں لا انتہا مثلث بنائے جا سکتے ہیں

جن کے سب اضلاع مکافی $ما^۲ = ۴ ا لا$ کو مس کرتے ہوں۔
نیز مکافی ہیں، لاانتہا مثلث بنائے جا سکتے ہیں جن کے اضلاع قائم زائد کو مس کرتے ہوں ۔

۳۵ ۔۔ ایک نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اگر اس سے ایک دائرہ کا مماس کھینچا جائے تو اس مماس کا طول ایسے بدلتا ہے جیسے وہ عمود جو ن سے دائرہ کے ایک ثابت مماس پر کھینچا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک مخروطی ہے جس کا وتر خاص دائرہ کے قطر کے مساوی ہے ۔

۳۶ ۔۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز ایک قائم زائد کے کسی نقطہ ن پر ہے اور جس کا نصف قطر ن میں سے گزرنیوالے زائد کے قطر کے مساوی ہے زائد کو تین دیگر نقطوں پر قطع کرتا ہے جو ایک متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں ۔ (۲۰۷)

۳۷ ۔۔ ایک زائد پر چار نقطے ا، ب، ج، ن ہیں اور ن میں سے دو خطوط متقاربوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں جو مثلث ا ب ج کے اضلاع سے علی الترتیب ل، م، ق اور لَ، مَ، قَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ
ل م : م ق = لَ مَ : مَ قَ ۔

۳۸ ۔۔ ثابت کرو کہ کوئی خطِ مستقیم جو $ما^۲ - ۴ ا لا = ۰$ اور $لا^۲ - ۴ ب ما = ۰$ کو ایسے نقطوں پر قطع کرے جو موسیقی مزدوج ہوں زائد $لا ما + ۲ ا ب = ۰$ کو مس کرے گا ۔

۳۹ ۔ ثابت کرو کہ دائرہ $لا^۲ + ما^۲ - ۲ ا^۲ = ۰$ کا کوئی مماس دو زائدوں $لا (لا + ما) - ۳ ا^۲ = ۰$ اور $ما (ما - لا) - ۳ ا^۲ = ۰$ سے موسیقی طور پر تقسیم ہوتا ہے ۔

۴۰ ۔۔ ہم مرکز مخروطیوں کے ایک نظام کے مرتب دئے گئے ہیں ۔ ثابت کرو کہ (۱) مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم کے قطبوں کا طریق ایک مکافی ہے اور (۲) مخروطیوں کے لحاظ سے ایک دئے ہوئے نقطہ کے قطبی کا لفاف ایک مکافی ہے ۔

متفرق امثلہ (۲)

۱ — خطوں لا^{2} + $\frac{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2}}{\text{ا ب}}$ لا ما + ما^{2} - ا ب + (ا - ب)(لا - ما) = ۰ (۲۰۸)
کے درمیانی زاویوں کے ناصف معلوم کرو۔

جواب: (لا + ما) {(ا - ب) (لا - ما) - ۲ ا ب} = ۰

۲ — اُن دائروں کا مشترک وتر معلوم کرو جن کی مساواتیں
ر = ۲ ا جب ط اور ر^{2} - ۲ ج ر جم ط - ب^{2} = ۰
ہیں۔

جواب: ۲ ر (ا جب ط - ج جم ط) - ب^{2} = ۰

۳ — ثابت کرو کہ اگر ایک دائرہ ایک دیئے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کرے اور نیز ایک دیئے ہوئے خطِ مستقیم کو مس کرے تو دائرہ کے مرکز کا طریق ایک مکافی ہے۔

۴ — ایک ثابت نقطہ (ف، گ) میں سے ایک خطِ مستقیم کو $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}}$ + $\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}}$ = ۱ کے کسی قطر کے متوازی کھینچا گیا ہے اور یہ خطِ مستقیم مزدوج قطر سے ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق قائم زائد
(ا^{2} - ب^{2}) لا ما - ا^{2} ف ما + ب^{2} گ لا = ۰
ہے۔

۵ — اُس مخروطی کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرو جس کا خروج المرکز $\sqrt{۲}$، ماسکہ (۰، ۰) اور مرتب لا + ما + ۱ = ۰ ہے۔

جواب: (لا + ۱)(ما + ۱) = ۰

---

۶ — اگر اُن عمودوں کے پائین ل، مہ ہوں جو ثابت نقطہ (ج، ۰) سے خطوط ا لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ = ۰ پر کھینچے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ ل مہ کی مساوات (ا - ب) لا + ۲ ھ ما + ب ج = ۰ ہے۔ اس سے اخذ کرو کہ اگر خطوط کو مبداء کے گرد اس طرح گھمایا جائے کہ اِن کے درمیان زاویہ مستقل رہے تو نقطہ (۱/۲ ج، ۰) سے ل مہ کا فاصلہ مستقل رہے گا۔

۷ — اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا قطر دائروں

لا۲ + ما۲ - ۴ = ۰ اور لا۲ + ما۲ + ۲ لا + ۴ ما - ۶ = ۰

کا مشترک وتر ہے۔

جواب: ۵ لا۲ + ۵ ما۲ - ۲ لا - ۴ ما - ۱۸ = ۰

۸ — اگر مکافی ما۲ - ۴ ا لا = ۰ کے وتر ف ق کے محاذی مکافی کے راس پر قائمہ زاویہ بنے تو ف، ق پر کے عماد مکافی (۲۰۹)

ما۲ - ۱۶ ا (لا - ۶ ا) = ۰

پر ملیں گے۔

۹ — ثابت کرو کہ ایک ناقص اور اُس دائرہ کے مشترک مماس جو ناقص کے مساوی مزدوج قطروں کے سِروں میں سے گذرتا ہے ایک مربع بناتے ہیں۔

۱۰ — مخروطی (ل۲ - م۲) لا۲ - ۴ ل م لا ما - (ل۲ - م۲) ما۲ - ۱ = ۰ کی مساوات اس کے متقاربوں کو حوالے کے محاور قرار دیکر معلوم کرو۔

جواب: لا ما = ۱ / (۲ ل۲ + ۲ م۲)

---

۱۱ — ثابت کرو کہ اُن عمودوں کے پائین جو مبداء سے خطوطِ مستقیم لا + ما - ۴ = ۰، لا + ۵ ما - ۲۶ = ۰ اور ۱۵ لا - ۲۷ ما - ۴۲۴ = ۰

پر کھینچے جائیں سب کے سب خطِ مستقیم ۳ لا + ما − ۸ = ۰ پر واقع ہوتے ہیں

۱۲ — ثابت کرو کہ اگر دائروں س₁ = ۰، س₂ = ۰ (دونوں میں لا² اور ما² کے سر اکائی ہیں) کے نصف قطر ر₁ اور ر₂ ہوں تو وہ نقطے جن پر دائروں کے محاذی مساوی زاوئے بنتے ہیں دائرہ $\frac{س_1}{ر_1^2} = \frac{س_2}{ر_2^2}$ پر ہیں۔

اگر اُس دائرہ کو جس کا قطر دئے ہوئے دائروں کے مشابہت کے مرکزوں کو ملانے والا خط ہو ان کے "مشابہت کا دائرہ" کہا جائے تو ثابت کرو کہ کسی تین دائروں کے مشابہت کے تین دائرے جبکہ انہیں سے دو دو کو لیا گیا ہو ہم محور ہوتے ہیں۔

۱۳ — ما² − ۴ ا لا = ۰ کے دو نقطوں پر جن کے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ ۲ ج ہے مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ مماس مکافی ما² = ۲ ا (لا + ج − ا) پر متقاطع ہوں گے۔

۱۴ — ثابت کرو کہ اگر $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے نقطوں (لا₁، ما₁)، (لا₂، ما₂)، (لا₃، ما₃) اور (لا₄، ما₄) پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں تو Σ لا₁ × $\Sigma \frac{۱}{لا_1}$ = Σ ما₁ × $\Sigma \frac{۱}{ما_1}$ = ۴ −

۱۵ — وہ دائرے جن کے قطر ایک قائم زائد کے متوازی وتروں کا ایک سلسلہ ہوں زائد کے دو ثابت نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں —

---

۱۶ — ثابت کرو کہ خطوط

لا² − ۲ لا ما قتم ۲ ع + ما² = ۰

کے درمیانی زاویوں کے ناصف لا² − ما² = ۰ ہیں خواہ محوروں کے درمیان زاویہ کچھ ہی ہو —

۱۷ — ہم محور دائروں کا ایک نظام ایک دئے ہوئے خطِ مستقیم سے نقطوں ف₁، ق₁، ف₂، ق₂، وغیرہ پر قطع ہوتا ہے ۔ ثابت کرو کہ وہ دائرے جن کے قطر ف₁ق₁، ف₂ق₂، وغیرہ ہیں ہم محور ہیں کیونکہ مشترک بنیادی محور دئے ہوئے خطِ مستقیم پر عمود ہے ۔

۱۸ — اگر ایک دائرہ جس کا مرکز (عہ، بہ) ہے ما² - ۴ ا لا = ۰ کو چار نقطوں پر قطع کرے جن میں سے تین ایک متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں تو ثابت کرو کہ (۱) چوتھے نقطہ کے محدد (عہ - ۸ ا، - ۳ بہ) ہیں اور (۲) دائرہ کا مرکز مکانی ۹ ما² = ۴ ا لا - ۳۲ ا² پر ہے ۔

۱۹ — ت سے ناقص لا²/ا² + ما²/ب² = ۱ کا مماس کھینچا گیا ہے جو (ا، ۰) پر کے مماس سے محور اصغر کے مساوی طول قطع کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ت مکانی ما²/ب² = ۲ لا/ا + ۲ پر ہے ۔

---

۲۰ — ایک دائرہ ناقص لا²/ا² + ما²/ب² - ۱ = ۰ کے ایک قطر کے سروں میں سے گذرتا ہے اور نیز ناقص کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کا مرکز ناقص

۴ ا² لا² + ۴ ب² ما² = (ا² - ب²)²

پر ہے ۔

۲۱ — ایک مثلث کے راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر عمودوں کے پائین نقاط (۲۰، ۲۵)، (۸، ۱۶) اور (۸، ۹) ہیں۔ مثلث کے راسوں کے محدد معلوم کرو ۔

جواب: چار نقطوں (۱۰، ۱۵)، (۵، ۱۰)، (۵۰، -۵) اور (۱۵، ۳۰) میں سے کوئی تین ۔

۲۲ — دائروں کے ہم محور نظام لا^{2} + ما^{2} + ۲گ لا − ج^{2} = ۰ میں سے دو دو دائرے لیے گئے ہیں جو ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر دائروں کے کسی ایسے زوج کے مشترک مماس پر نقطوں (۰، ج) اور (۰، −ج) سے عمود ع$_{1}$، ع$_{2}$ ہوں تو ع$_{1}$ع$_{2}$ = ج^{2}۔

۲۳ — مکافی ما^{2} − ۴ ا لا = ۰ پر کوئی نقطہ ن ہے اور محور پر نقطہ ق ایسا ہے کہ ن ق = ن ا جہاں ا مکافی کا راس ہے۔ ثابت کرو کہ ن ق، مکافی ما^{2} + ۳۲ ا لا = ۰ کو لف کرتا ہے۔

۲۴ — $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = ۱$ کے نقطہ (لاَ، ماَ) پر کا مماس دائرہ لا^{2} + ما^{2} − ا^{2} = ۰ سے نقطوں ق اور قَ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز اور ق، قَ میں سے گذرنے والے خطوط لا ماَ = ما(لاَ ± ا ز) ہیں۔

۲۵ — ایک خطِ مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اُس مقطوع کے محاذی جو اس پر خطوط لا = ± ا منقطع کرتے ہیں نقطہ (ج، ۰) پر ایک قائمہ زاویہ بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ خطِ مستقیم مخروطی $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ا}^{2} - \text{ج}^{2}} = ۱$ کو مس کرتا ہے۔

---

۲۶ — ثابت کرو کہ اُس مثلث کا نو نقطی دائرہ جو خطوط ۳لا + ۴ما − ۱۲ = ۰، ۳لا − ۴ما − ۳۶ = ۰، اور لا = ۰ سے بنتا ہے

۴ لا^{2} + ۴ ما^{2} − ۲۵ لا + ۲۴ ما + ۳۶ = ۰

ہے۔ نیز ثابت کرو کہ (۱) مثلث کا اندرونی دائرہ

لا^{2} + ما^{2} − ۶ لا + ۶ ما + ۹ = ۰

ہے اور (۲) وہ دائرہ جو پہلے ضلع کو اور دوسرے دو ممدودہ ضلعوں کو مس کرتا ہے

لا^{2} + ما^{2} − ۱۶لا − ۱۴ما + ۴۹ = ۰ ہے۔

ثابت کرو کہ نو نقطی دائرہ دوسرے دو دائروں کو مس کرتا ہے۔

۲۷ — اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو دائروں لا۲ + ما۲ − ۴ = ۰، لا۲ + ما۲ − ۶ لا − ۸ ما + ۱۰ = ۰، اور لا۲ + ما۲ + ۲ لا − ۴ ما − ۲ = ۰ میں سے ہر ایک کو ایک قطر کے سروں پر مس کرتا ہے۔

جواب: لا۲ + ما۲ − ۴ لا − ۶ ما − ۴ = ۰

۲۸ — ثابت نقطہ (ھ، ک) سے مکافی ما۲ = ۴ ا (لا + ا) کے مماس ت ف، ت ق کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف اور ق پر کے عماد، ا کی تمام قیمتوں کے لیے، خط ھ لا + ک ما + ھ۲ + ک۲ = ۰ پر ملتے ہیں۔

۲۹ — مکافی ما۲ − ۴ ا لا = ۰ کے گرد متساوی الاضلاع مثلث کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن مثلثوں کے راس مخروطی

(۳ لا + ا) (۳ ا + لا) = ما۲

پر ہیں۔

۳۰ — اگر لا۲/ا۲ + ما۲/ب۲ = ۱ پر دو نقطے ف، ق ہوں جنکے خارج المرکز زاویے طہ اور فہ رشتہ قط طہ + قط فہ = ۲ کو پورا کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ ف ق ناقص

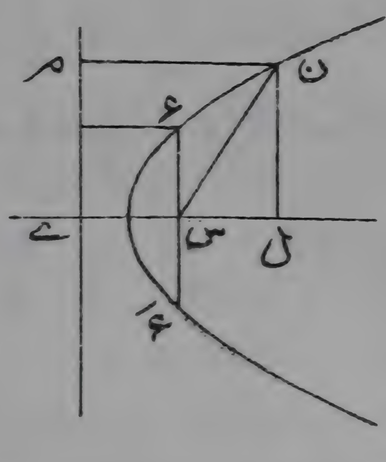
$$\frac{\text{۴ لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{۴ لا}}{\text{ا}} = 0$$

کو لف کرتا ہے۔

آٹھواں باب

مخروطی کی قطبی مساوات جبکہ ماسکہ قطب ہو

۱۶۰ — ایک مخروطی کی قطبی مساوات معلوم کرنا جبکہ ماسکہ قطب ہو۔
فرض کرو کہ ماسکہ س اور ے م مرتب ہے۔ فرض کرو کہ خروج المرکز ز ہے۔



س ے کو مرتب پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ س ے ابتدائی خط ہے۔

فرض کرو کہ وتر خاص ع س عَ ہے تو ز × س ے

= س عَ = ل (فرض کرو)

فرض کرو کہ منحنی کے کسی نقطہ ن کے محدد ر، طہ ہیں۔ فرض کرو کہ (۲۱۳

ن مہ، ن ل علی الترتیب مرتب پر اور س ے پر عمود ہیں۔ تب

س ن = ز × ن مہ = ز × ل ے = ز × ل س + ز × س ے

یا ر = - ز ر جم طہ + ل

∴ ل/ر = ۱ + ز جم طہ

اگر مخروطی کا محور ابتدائی خط کے ساتھ زاویہ عہ بنائے تو منحنی کی مساوات

ل/ر = ۱ + ز جم (طہ - عہ)

ہو گی۔ کیونکہ اس صورت میں س ن، س ے کے ساتھ زاویہ طہ - عہ بناتا ہے۔

۱۶۱ — اگر مرتب پر کے کسی نقطہ کے محدد ر، طہ ہوں تو

ر جم طہ = س ے = ل/ز

اس لئے مرتب کی مساوات

ل/ر = ز جم طہ

ہے۔ اسی طرح ل/ر = ۱ + ز جم (طہ - عہ) کے مرتب کی مساوات

ل/ر = ز جم (طہ - عہ)

ہے۔

اگر ماسکی وتر ن س نَ ہو اور ن کا سمتی زاویہ ط تو نَ کا سمتی زاویہ ط + π ہوگا۔ پس اگر س ن = ر، س نَ = رَ تو

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + ز\,جم\,ط \text{، اور } \frac{ل}{رَ} = ۱ + ز\,جم\,(ط + \pi)$$

$$\therefore \quad \frac{ل}{ر} + \frac{ل}{رَ} = ۲$$

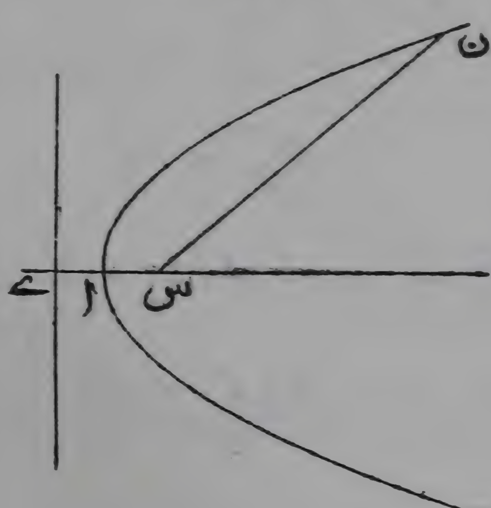
$$\text{پس} \quad \frac{۱}{ر} + \frac{۱}{رَ} = \frac{۲}{ل}$$

اس لئے کسی مخروطی میں نیم وتر خاص کسی ماسکی وتر کے مقطوعوں کے درمیان موسیقی اوسط ہوتا ہے۔

۲۶۲ — مخروطی $\frac{ل}{ر} = ۱ + ز\,جم\,ط$ کو اس کی مساوات سے مرتسم کرنا۔ (۲

(۱) فرض کرو ز = ۱ تو منحنی مکانی ہے اور مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + جم\,ط$$



نقطہ ا پر جہاں منحنی محور کو قطع کرتا ہے

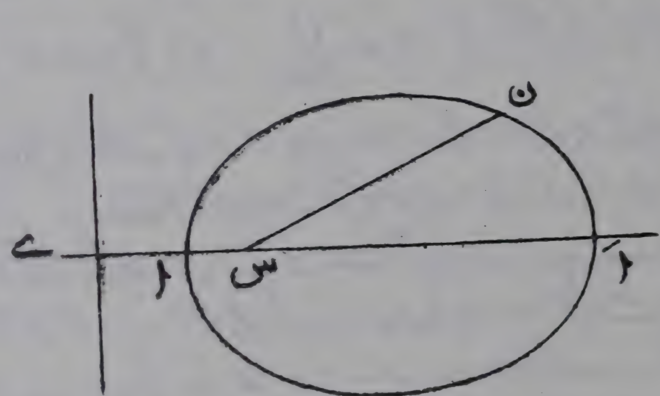
$$ط = ۰ \quad \text{اور} \quad ر = \frac{۱}{۲} ل$$

جیسے زاویہ ط بڑہتا ہے (۱ + جم ط) گھٹتا ہے یعنی $\frac{ل}{ر}$ گھٹتا ہے اور اس لیے ر بڑہتا ہے، اور ر بغیر کسی حد کے بڑہتا ہے یہانتک کہ ط = ۰ تو ر لاانتناہی ہو جاتا ہے۔ جیسے ط، π کے آگے بڑھتا ہے (۱ + جم ط) مسلسل بڑہتا ہے اور اس لیے ر مسلسل گھٹتا ہے یہاں تک کہ ط = ۲ π تو وہ پھر $\frac{۱}{۲}$ ل کے مساوی ہو جاتا ہے۔ پس منحنی کی شکل وہ ہے جو نقشہ میں دکھائی گئی ہے اور وہ سمت ا س میں لاانتہا فاصلہ تک جاتی ہے۔

(۲) فرض کرو کہ ز اکائی سے کم ہے تو منحنی ایک ناقص ہے۔

$$\text{نقطہ ا پر } ط = ۰ \quad \text{اور} \quad ر = \frac{ل}{۱ + ز}$$

جیسے ط بڑہتا ہے جم ط گھٹتا ہے اور اس لیے $\frac{ل}{ر}$ گھٹتا ہے یعنی ر بڑہتا ہے یہانتک کہ ط = π تو ر = $\frac{ل}{۱ - ز}$ [چونکہ ز < ۱، ر کی یہ قیمت مثبت ہے]۔



اس لیے منحنی محور کو مکرر ایک ایسے نقطہ اَ پر قطع کرتا ہے کہ س اَ = $\frac{ل}{۱-ز}$ -

جیسے طہ، π سے ۲π تک بڑھتا ہے جم طہ مسلسل - ۱ سے ۱ تک بڑھتا ہے، اسلئے $\frac{ل}{ر}$ مسلسل بڑھتا ہے اور ر مسلسل $\frac{ل}{۱-ز}$ سے $\frac{ل}{۱+ز}$ تک گھٹتا ہے -

چونکہ طہ کی کسی قیمت کے لیے جم طہ = جم (۲π - طہ) اس لیے منحنی محور کے گرد متشاکل ہے -

اس لیے جب، ز اکائی سے چھوٹا ہوتا ہے تو مساوات ایک بند منحنی کو تعبیر کرتی ہے جو ابتدائی خط کے گرد متشاکل ہوتی ہے -

(۳) فرض کرو کہ ز اکائی سے بڑا ہے تو منحنی ایک زائد ہے -

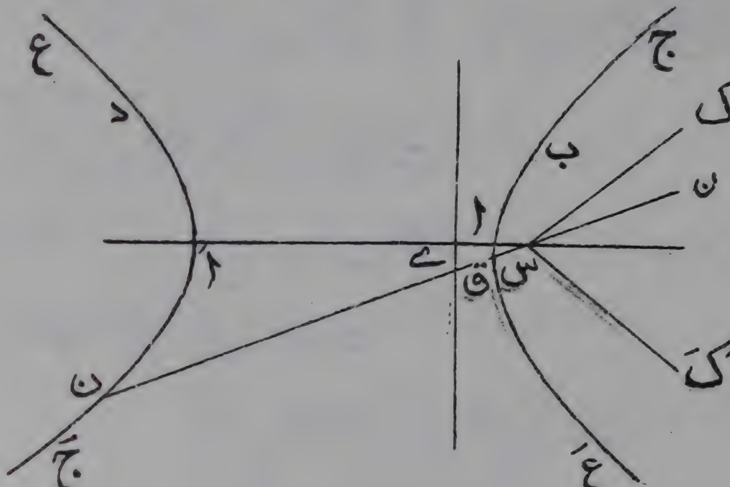
نقطہ ا پر طہ = ۰، اور ر = $\frac{ل}{۱+ز}$

جیسے طہ بڑھتا ہے جم طہ گھٹتا ہے اور اس لیے ر بڑھتا ہے یہاں تک کہ ۱ + ز جم طہ = ۰ - طہ کی اس قیمت کے لیے جس کو ہم عہ کہینگے (زاویہ اس ک شکل میں) ر کی قیمت لا انتہا بڑی ہو جاتی ہے -

جیسے طہ، عہ کے آگے بڑھتا ہے (۱ + ز جم طہ) منفی ہو جاتا ہے اور جب، طہ = π تو ر = - $\frac{ل}{ز-۱}$ = س اَ (شکل میں) اور (۱ + ز جم طہ) منفی رہے گا یہاں تک کہ طہ، (۲π - عہ) کے مساوی ہو یعنی زاویہ اس ک (شکل میں) ـــــ کے مساوی ہو - جب، طہ = ۲π - عہ تو ر پھر لا انتہا ہی ہو جاتا ہے - اگر طہ اس سے قدرے کم ہو تو ر بہت بڑا اور منفی ہو گا اور اگر طہ قدرے بڑا ہو تو ر بہت بڑا اور مثبت ہو گا - ر کی قیمتیں مثبت رہیں گی جبکہ طہ، ۲π - عہ سے ۲π تک بدلے -

پس منحنی حسب ذیل ترتیب میں مرتسم ہوتا ہے :-

اول حصہ ا ب ج پھر جَ ن اَ اور اَ د ع اور آخر میں
ع ق ا ۔



منحنی دو جداگانہ شاخوں پر مشتمل ہے اور پوری شاخ جَ ن اَ د ع کے لیے سمتی نیم قطر منفی ہے ۔

اگر ایک خط س ق ن (حسب شکل) کھینچا جائے جو منحنی کو دو نقطوں ن اور ق پر جو مختلف شاخوں پر ہوں قطع کرے تو اِن دو نقطوں ق اور ن کے متعلق یہ نہیں سمجھنا چاہیئے کہ اُن کا سمتی زاویہ ایک ہی ہے ۔ سمتی نیم قطر س ن منفی ہے یعنی س ن کو اُس سمت میں کھینچا گیا ہے جو اُس سمت کے مخالف ہے جو اس کے سمتی زاویہ کی تحدید کرتی ہے، اس لیے سمتی زاویہ ا س ن ہونا چاہیئے جہاں ن، ن س ممدودہ پر ہے ۔ پس اگر ق کا سمتی زاویہ ط ہے تو ن کا ط - π ہوگا ۔

۱۶۳ ۔ ایک مخروطی پر کے دو دئے ہوئے نقطوں میں سے (۲۱۷)

گذرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا اور کسی نقطہ پر کے مماس کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ دو نقطوں ن اور ق کے سمتی زاویے علی الترتیب (عہ - بہ) اور (عہ + بہ) ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ١ + ز جم ط، \ldots\ldots (١)$$

ہے۔ وہ خطِ مستقیم جس کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = أ جم ط + ب جم (ط - عہ)، \ldots (٢)$$

ہے کسی دو نقطوں میں سے گذرے گا کیونکہ اس کی مساوات میں دو غیر تابع مستقلات أ اور ب شامل ہیں۔ چنانچہ وہ دو نقطوں ن اور ق میں سے گذرے گا اگر (٢) میں ر کی وہی قیمتیں ہوں جو اسکی (١) میں ہیں جبکہ ط = عہ - بہ اور جبکہ ط = عہ + بہ۔ یہ صورت اس وقت ہو گی جبکہ

$$١ + ز جم (عہ - بہ) = أ جم (عہ - بہ) + ب جم بہ$$

اور $$١ + ز جم (عہ + بہ) = أ جم (عہ + بہ) + ب جم بہ$$

$$\therefore \quad أ = ز \quad اور \quad ب جم بہ = ١$$

أ اور ب کی اِن قیمتوں کو (٢) میں درج کرنے سے ہمیں وتر کی مطلوبہ مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ز جم ط + قط بہ جم (ط - عہ)، \ldots\ldots (٣)$$

حاصل ہوتی ہے۔

اُس نقطہ پر جس کا سمتی زاویہ عہ ہے مماس کی مساوات معلوم

کرنے کے لیے (۳) میں به = ۰ رکھنا چاہیئے چنانچہ اس طرح حاصل ہوگا

$$\frac{ل}{ر} = ز جم طہ + جم (طہ - عہ)، \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

نتیجہ صریح ۔ اگر مخروطی کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + ز جم (طہ - جہ)$$

(۲۱۸) ہو تو اُس وتر کی مساوات جو نقطوں (عہ - به) اور (عہ + به) کو ملاتا ہے

$$\frac{ل}{ر} = ز جم (طہ - جہ) + قط به جم (طہ - عہ)$$

ہے اور عہ پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ز جم (طہ - جہ) + جم (طہ - عہ)$$

ہے۔

۱۶۴۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + ز جم طہ، \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہے اور فرض کرو کہ نقطہ کے محدد $ر_۱$، $طہ_۱$ ہیں۔

فرض کرو کہ اُن نقطوں کے سمتی زاویے عہ ± به ہیں جن پر کے مماس نقطہ ($ر_۱$، $طہ_۱$) میں سے گذرتے ہیں۔

اُس خط کی مساوات جو اِن نقطوں میں سے گذرتا ہے

$$\frac{ل}{ر} = ز جم طہ + قط به جم (طہ - عہ)، \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہے - اِن نقطوں پر کے مماسوں کی مساواتیں

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ز جم طہ} + \text{جم}\,(\text{طہ} - \text{عہ} + \text{بہ})$$

اور

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ز جم طہ} + \text{جم}\,(\text{طہ} - \text{عہ} - \text{بہ})$$

ہیں - چونکہ یہ مماس $(\text{ر}_1 ، \text{طہ}_1)$ میں سے گذرتے ہیں اِس لیے

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}_1} = \text{ز جم طہ}_1 + \text{جم}\,(\text{طہ}_1 - \text{عہ} + \text{بہ})$$

اور

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}_1} = \text{ز جم طہ}_1 + \text{جم}\,(\text{طہ}_1 - \text{عہ} - \text{بہ})$$

پس $\text{طہ}_1 = \text{عہ}$ اور $\text{جم بہ} = \frac{\text{ل}}{\text{ر}_1} - \text{ز جم طہ}_1$

مساوات (۲) میں عہ اور بہ کی بجائے اندراج کرو تو

$$\left(\frac{\text{ل}}{\text{ر}} - \text{ز جم طہ}\right)\left(\frac{\text{ل}}{\text{ر}_1} - \text{ز جم طہ}_1\right) = \text{جم}\,(\text{طہ} - \text{طہ}_1) \quad \ldots\ldots (۳)$$

جو مطلوبہ مساوات ہے -

۱۶۵ - ایک مخروطی کے کسی نقطہ پر کے عماد کی قطبی مساوات معلوم کرنا جبکہ ماسکہ قطب ہو -

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = ۱ + \text{ز جم طہ}$ ہے تو کسی نقطہ عہ پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ز جم طہ} + \text{جم}\,(\text{طہ} - \text{عہ})$$

ہے -

اِس مماس پر کسی عمودی خط کی مساوات

$$\frac{\text{ج}}{\text{ر}} = \text{ز جم}\left(\text{طہ} + \frac{\pi}{۲}\right) + \text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{\pi}{۲} - \text{عہ}\right)$$

یا

$$\frac{\text{ج}}{\text{ر}} = -\,\text{ز جب طہ} - \text{جب}\,(\text{طہ} - \text{عہ})$$

ہے -

یہ عماد کی مطلوبہ مساوات ہوگی اگر ج کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ نقطہ $\left(\frac{ل}{1+ز\,جم\,عہ}،\ عہ\right)$
خط پر ہو۔ اس لیے حاصل ہونا چاہئیے

$$ج\ \frac{1+ز\,جم\,عہ}{ل} = -\,ز\,جب\,عہ$$

یا

$$ج = \frac{-\,ل\,ز\,جب\,عہ}{1+ز\,جم\,عہ}$$

پس عماد کی مساوات

$$\frac{ل\,ز\,جب\,عہ}{1+ز\,جم\,عہ} \times \frac{1}{ر} = ز\,جب\,طہ + جب\,(طہ - عہ)$$

ہے۔

مثال ۱۔ دو نقطوں پر جن کے سمتی زاویے علی الترتیب عہ اور بہ ہیں مماسوں کی مساواتیں

$$\frac{ل}{ر} = ز\,جم\,طہ + جم\,(طہ - عہ)$$

اور

$$\frac{ل}{ر} = ز\,جم\,طہ + جم\,(طہ - بہ)$$

ہیں۔ یہ مماس جہاں ملتے ہیں وہاں

$$جم\,(طہ - عہ) = جم\,(طہ - بہ)$$

$$\therefore\ طہ = \frac{عہ + بہ}{2}$$

پس اگر ایک مخروطی کے نقطوں ن، ق پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ت ہو تو س ت، زاویہ ن س ق کی تنصیف کرے گا۔ لیکن اگر مخروطی قطع زائد ہو اور نقطے مختلف شاخوں پر ہوں تو

س ت' خارجی زاویہ ن س ق کی تنصیف کرے گا کیونکہ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ن کا سمتی زاویہ (اگر ن بعید تر شاخ پر ہو) وہ زاویہ نہیں ہے جو س ن' س ے کے ساتھ بناتا ہے بلکہ وہ زاویہ ہے جو ن س ممدودہ س ے کے ساتھ بناتا ہے ۔

مثال ۲ ۔ اگر ایک مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس مرتب سے ک پر ملے تو زاویہ ک س ن قائمہ ہوگا ۔

اگر ن کا سمتی زاویہ عہ ہو تو ن پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{ل}{ر} = \text{ز جم ط} + \text{جم (ط - عہ)}$$

ہے ۔ یہ مماس مرتب سے جس کی مساوات ل = ز ر جم ط ہے وہاں ملیگا جہاں جم (ط - عہ) = ۰

پس نقطہ ک پر ط - عہ = $\pm \frac{\pi}{2}$

اس لیے زاویہ ک س ن قائمہ ہے

مثال ۳ ۔ اگر ایک مخروطی کے وتروں کے محاذی ایک ماسکہ پر ایک مستقل زاویہ بنے تو وتر کے سروں پر کے مماس ایک ثابت مخروطی پر ملیں گے اور وتر ایک دوسرے ثابت مخروطی کو مس کرے گا ۔

فرض کرو کہ ۲ بہ وہ زاویہ ہے جو وتر کے محاذی ماسکہ پر بنتا ہے ۔ فرض کرو کہ وتر کے سروں کے سمتی زاویے عہ - بہ اور عہ + بہ ہیں ۔ وتر کی مساوات ہوگی

$$\frac{ل}{ر} = \text{ز جم ط} + \text{قط بہ جم (ط - عہ)}$$

یا $\frac{\text{ل جم بہ}}{\text{ر}} = \text{ز جم بہ جم ط} + \text{جم (ط - عہ)}$، ....(۱)

لیکن (۱) مخروطی

$\frac{\text{ل جم بہ}}{\text{ر}} = \text{۱} + \text{ز جم بہ جم ط}$، ......(۲)

کے اُس نقطہ پر کے مماس کی مساوات ہے جس کا سمتی زاویہ عہ ہے۔
پس وتر ہمیشہ ایک ثابت مخروطی کو مس کرتا ہے جس کا خروج المرکز ز جم بہ ہے اور وتر خاص ۲ ل جم بہ ہے۔
وتر کے سروں پر کے مماسوں کی مساواتیں

$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ز جم ط} + \text{جم (ط - عہ + بہ)}$،

اور $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ز جم ط} + \text{جم (ط - عہ - بہ)}$

ہیں۔ یہ دونوں خط مخروطی

$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ز جم ط} + \text{جم بہ}$

سے ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں یعنے وہاں جہاں ط = عہ اور $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ز جم عہ} + \text{جم بہ}$۔
پس وتر کے سروں پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق مخروطی

$\frac{\text{ل قط بہ}}{\text{ر}} = \text{۱} + \text{ز قط بہ جم ط}$، ....(۳) (۲۲۱)

ہے۔
مخروطی (۲) اور (۳) دونوں کا ماسکہ اور مرتب وہی ہیں جو دئے ہوئے مخروطی کے ہیں۔
مثال ۴۔ اُس مثلث کے حائط دائرہ کی مساوات معلوم

کرو جو ایک مکافی کے تین مماسوں سے بنتا ہے۔

فرض کرو کہ تین نقطوں ا، ب، ج کے سمتی زاوئے علی الترتیب عہ، بہ، جہ ہیں۔

فرض کرو کہ مکافی کی مساوات

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = ۱ + \text{جم}\,\text{ط}$$

ہے۔ تب ا، ب، ج پر کے مماسوں کی مساواتیں

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{جم}\,\text{ط} + \text{جم}\,(\text{ط} - \text{عہ})،$$

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{جم}\,\text{ط} + \text{جم}\,(\text{ط} - \text{بہ})،$$

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{جم}\,\text{ط} + \text{جم}\,(\text{ط} - \text{جہ})،$$

ہیں۔ ب اور ج پر کے مماس وہاں ملتے ہیں جہاں

$$\text{ط} = \frac{۱}{۲}(\text{بہ} + \text{جہ}) \text{ اور } \therefore \frac{\text{ل}}{\text{ر}} = ۲\,\text{جم}\,\frac{\text{بہ}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{جہ}}{۲}$$

ج اور ا پر کے مماس وہاں ملتے ہیں جہاں

$$\text{ط} = \frac{۱}{۲}(\text{جہ} + \text{عہ})، \text{ اور } \therefore \frac{\text{ل}}{\text{ر}} = ۲\,\text{جم}\,\frac{\text{جہ}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{۲}$$

اور ا اور ب پر کے مماس وہاں ملتے ہیں جہاں

$$\text{ط} = \frac{۱}{۲}(\text{عہ} + \text{بہ})، \text{ اور } \therefore \frac{\text{ل}}{\text{ر}} = ۲\,\text{جم}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{بہ}}{۲}$$

اندراج سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ تین نقاطِ تقاطع اُس دائرہ پر ہیں جس کی مساوات

$$\text{ر} = \frac{\text{ل}}{\text{۲ جم}\frac{\text{عہ}}{۲}\text{جم}\frac{\text{بہ}}{۲}\text{جم}\frac{\text{جہ}}{۲}} \text{جم}\left(\text{طہ} - \frac{\text{عہ}}{۲} - \frac{\text{بہ}}{۲} - \frac{\text{جہ}}{۲}\right)$$

ہے۔

یہ دائرہ ہمیشہ مکافی کے ماسکہ میں سے گذرتا ہے۔

مثال ۵۔ مخروطی $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = ۱ + \text{ز جم طہ}$ کے متقاربوں کی مساوات معلوم کرنا۔

عہ پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ز جم طہ} + \text{جم}(\text{طہ} - \text{عہ}) \quad \text{،}\ldots\ldots (۱)$$

ہے۔ نقطہ عہ، مخروطی پر لاتناہی پر کا نقطہ ہوگا اگر

$$۰ = ۱ + \text{ز جم عہ} \quad \text{،}\ldots\ldots\ldots (۲)$$

مطلوبہ مساوات، (۱) اور (۲) سے عہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگی چنانچہ وہ

$$\left\{\frac{\text{ز ل}}{\text{ر}} + (۱ - \text{ز}^۲)\,\text{جم طہ}\right\}^۲ = \text{ز}^۲\text{جب}^۲\text{طہ جب}^۲\text{عہ} = (\text{ز}^۲ - ۱)\,\text{جب}^۲\text{طہ}$$

ہے۔

(۲۲۲)
آٹھویں باب پر مثالیں

۱۔ ایک مکافی کے کسی دو مماسوں کے درمیان خارجی زاویہ اِن کے نقاطِ تماس کے سمتی زاویوں کے فرق کا نصف ہوتا ہے۔

۲۔ ایک مکافی کے دو مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق جبکہ مماس ایک دوسرے کو ایک مستقل زاویہ پر قطع کریں ایک قطع زائد ہے جس کا ماسکہ اور مرتب وہی ہیں جو ابتدائی مکافی کے ہیں۔

۳ — اگر ایک مخروطی کے کوئی دو ماسکی وتر ن س نَ اور ق س قَ ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{\text{ن س} \times \text{س نَ}} + \frac{۱}{\text{ق س} \times \text{س قَ}}$$ مستقل ہے۔

۴ — اگر ایک مکافی پر ا، ب، ج کوئی تین نقطے ہوں اور اِن نقطوں پر کے مماسوں سے مثلث اَ بَ جَ بنے تو ثابت کرو کہ س ا × س ب × س ج = س اَ × س بَ × س جَ جہاں س مکافی کا ماسکہ ہے۔

۵ — اگر ایک ناقص کا ایک ماسکی وتر محور کے ساتھ زاویہ عہ بنائے تو ثابت کرو کہ وہ زاویہ جو اس کے سروں پر کے مماسوں کے درمیان بنتا ہے

$$\text{مس}^{-۱} \frac{۲\ \text{ز جب عہ}}{۱ - \text{ز}^۲}$$

ہے۔

۶ — مساوات $\frac{\text{ل}}{\text{ر}}$ = ۱ + ز جم طہ کے ذریعہ ثابت کرو کہ ناقص کی تکوین ایک ایسے نقطہ کی حرکت سے ہو سکتی ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔

۷ — ایک وتر کے محاذی مخروطی کے ماسکہ پر مستقل زاویہ (۲ عہ) بنتا ہے، وتر کے قطب کا طریق معلوم کرو، اُن صورتوں میں تمیز کرو جنکے لیے جم عہ ⋜ ز۔

۸ — ایک مخروطی کا ایک وتر ن ق ہے جو ایک ماسکہ پر قائمہ زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ق کے قطب کا طریق اور وہ طریق جسکو ن ق لف کرتا ہے مخروطیاں ہیں جن کے وتر خاص اور ابتدائی مخروطی کے وتر خاص میں نسبتیں علی الترتیب $\sqrt{۲}$: ۱ اور ۱ : $\sqrt{۲}$ ہیں۔

۹ــ ایک مخروطی کا ماسکہ اور مرتب دکیے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِس کے لحاظ سے ایک دیے ہوئے نقطہ کا قطبی ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ (۲۲۳)

۱۰ــ اگر دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ مشترک ہو تو ثابت کرو کہ ان کے مشترک وتروں میں سے دو وتر اِن کے مرتبوں کے نقطہ تقاطع میں سے گذرینگے۔

۱۱ــ دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ مشترک ہے اور اِس ماسکہ میں سے کوئی وتر کھینچا گیا ہے جو مخروطیوں سے علی الترتیب ن، نَ اور ق، قَ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن، نَ پر کے مماس، ق اور قَ پر کے مماسوں سے ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جو مرتبوں کے نقطہ تقاطع میں سے گذرنیوالے دو خطوطِ مستقیم پر واقع ہیں، یہ خطوط علی القوائم ہوں گے اگر مخروطیوں کا خروج المرکز ایک ہی ہو۔

۱۲ــ ایک مکافی کے ماسکہ میں سے کوئی دو وتر ل س لَ، م س مَ کھینچے گئے ہیں۔ ل پر کا مماس نقطوں م، مَ پر کے مماسوں سے نقطوں ک، کَ پر ملتا ہے اور لَ پر کا مماس اُن سے گ، گَ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ خطوط گ ک، گَ کَ علی القوائم ہیں۔

۱۳ــ دو مخروطی ایک مشترک ماسکہ رکھتے ہیں جس کے گرد ایک کو گھمایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اِن کے مشترک وتروں میں سے دو، ایسے مخروطیوں کو مس کرینگے جن کا ماسکہ ثابت ماسکہ ہے۔

۱۴ــ ثابت کرو کہ $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = ۱ + \text{ز جم ط}$ کے دو مماسوں کے (جو باہم علی القوائم ہیں) نقطہ تقاطع کے طریق کی مساوات

$$\text{ر}^2 (\text{ز}^2 - ۱) - ۲\,\text{ل ز ر جم ط} + ۲\,\text{ل}^2 = ۰$$

ہے۔

۱۵ــ اگر ایک ناقص کے ماسکوں س، ھ میں سے گذرنیوالے دو وتر ن س ق، ن ھ ر ہوں تو $\frac{\text{ن س}}{\text{س ق}} + \frac{\text{ن ھ}}{\text{ھ ر}}$، ن کے محل پر

منحصر نہیں ہوگا ۔

۱۶ ـــ دو مخروطی ایک ہی ماسکہ کے ساتھ بنائے گئے ہیں اور اس ماسکہ کا فاصلہ ہر ایک کے متناظر مرتب سے وہی ہے ۔ اگر یہ مخروطی ایک دوسرے کو مس کریں تو ثابت کرو کہ قاطع محوروں کے درمیانی زاویہ کے نصف کی جیب کا دُگنا خروج المرکزوں کے متکافیوں کے فرق کے مساوی ہے ۔

۱۷ ـــ دئے ہوئے نصف قطر کا ایک دائرہ جو ایک دئے ہوئے مخروطی کے ماسکہ میں سے گذرتا ہے مخروطی کو نقطوں ا، ب، ج، د پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ (۲۲۴)

$$س ا \times س ب \times س ج \times س د$$

مستقل ہے ۔

۱۸ ـــ ایک دائرہ ایک مخروطی کے ماسکہ میں سے جس کا وتر خاص ۲ل ہے گذرتا ہے اور مخروطی سے چار نقطوں پر ملتا ہے جن کے فاصلے ماسکہ سے $ر_۱$، $ر_۲$، $ر_۳$، $ر_۴$ ہیں ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{ر_۱} + \frac{۱}{ر_۲} + \frac{۱}{ر_۳} + \frac{۱}{ر_۴} = \frac{۲}{ل}$$

۱۹ ـــ ایک دیا ہوا دائرہ جس کا مرکز ایک مکافی کے محور پر ہے ماسکہ س میں سے گذرتا ہے اور کسی مخروطی سے جس کا وتر خاص دیا گیا ہے اور ماسکہ س ہے اور مکافی کا ایک مماس اس کا مرتب ہے چار نقطوں ا، ب، ج، د پر منقطع ہوتا ہے ۔ ثابت کرو کہ فاصلوں س ا، س ب، س ج، س د کا مجموعہ مستقل ہے ۔

۲۰ ـــ دو مخروطیوں میں ایک ماسکہ س مشترک ہے اور ان کے محاور ایک ہی سمت میں ہیں ۔ ان مخروطیوں میں سے ایک پر نقطہ ن اور دوسرے پر نقطہ ق لیے گئے ہیں ایسے کہ ن س اور ق س علی القوائم ہیں ۔ ثابت کرو کہ ن اور ق پر کے مماس ایک مخروطی پر ملتے ہیں جسکے خروج المرکز کا مربع ابتدائی مخروطیوں کے خروج المرکزوں کے مربعوں کے

مجموعہ کے مساوی ہے۔

۲۱ ــــ ایک مشترک وتر خاص کے ساتھ مخروطیوں کا ایک سلسلہ مرتسم کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ اِن کے اُن نقطوں کا طریق جن پر ماسکہ سے مماس کی عمود نیم وتر خاص کے مساوی ہے مساوات ل = - ر جم ۲ طہ سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۲ ــــ اگر ایک ثابت نقطہ و میں سے گذرنیوالا وتر ن و نَ ہو تو $\frac{۱}{۲}$ نَ س و مس $\frac{۱}{۲}$ ن س و مستقل ہوگا جہاں س، مخروطی کا ایک ماسکہ ہے۔

۲۳ ــــ مخروطی مرتسم کئے گئے ہیں جن کے وتر خاص مساوی ہیں اور ایک ماسکہ مشترک ہے۔ نیز متناظر مرتب ایک ثابت ہم ماسکی مخروطی کو لف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ مخروطی سب کے سب دو ثابت مخروطیوں کو مس کرتے ہیں جن کے وتر خاص کے متکافی علی الترتیب متغیر مخروطی اور اِس کے ہم ماسکہ ثابت مخروطی کے وتر خاص کا مجموعہ اور فرق ہیں اور جن کا مرتب وہی ہے جو ثابت ہم ماسکی مخروطی کا ہے۔

۲۴ ــــ ایک مخروطی کو مرتسم کیا گیا ہے جس کا ماسکہ اور خروج المرکز وہی ہیں جو مخروطی $\frac{ل}{ر} = ۱ + ز \, جم \, طہ$ کے ہیں اور یہ دو مخروطی نقطہ طہ = عہ پر ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے وتر خاص کا طول

$$\frac{۲ ل (۱ - ز^۲)}{ز^۲ + ۲ ز \, جم \, عہ + ۱}$$ ہوگا۔

۲۵ ــــ نقطہ (رَ، طَ) سے مخروطی $\frac{ل}{ر} = ۱ + ز \, جم \, طہ$ کے (۲۲۵)
مماسوں کا زوج کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ اِن مماسوں کے زوج کی مساوات

$$\left\{\left(\frac{ل}{رَ} - ز \, جم \, طَ\right)^۲ - ۱\right\}\left\{\left(\frac{ل}{ر} - ز \, جم \, طہ\right)^۲ - ۱\right\}$$

$$= \left[\left(\frac{\text{ل}}{\text{ر}} - \text{ز جم طہ}\right)\left(\frac{\text{ل}}{\text{ر}} - \text{ز جم طَہ}\right) - \text{جم}(\text{طہ} - \text{طَہ})\right]^{2}$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

نیز ثابت کرو کہ متقارب

$$\frac{\text{ز ل}}{\text{ر}} = (\text{ز}^{2} - 1)\,\text{جم طہ} \pm \text{جب طہ}\sqrt{\text{ز}^{2} - 1}$$

ہیں۔

۲۶ — اگر $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = 1 + \text{جم طہ}$ کے نقطوں عہ، بہ، جہ پر کے عماد نقطہ (غہ، فہ) پر ملیں تو ثابت کرو کہ ۲ فہ = عہ + بہ + جہ۔

۲۷ — اگر $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = 1 + \text{ز جم طہ}$ کے اُن نقطوں پہ کے عماد جن کے سمتی زاویے طہ_1، طہ_2، طہ_3، طہ_4 ہیں نقطہ (غہ، فہ) پر ملیں تو ثابت کرو کہ $\text{طہ}_1 + \text{طہ}_2 + \text{طہ}_3 + \text{طہ}_4 - 2\,\text{فہ} = (2\text{ن} + 1)\pi$ ۔

۲۸ — اگر $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = 1 + \text{جم طہ}$ کے اُن نقطوں ن، ق، ر پر کے عماد جن کے سمتی زاویے طہ_1، طہ_2، طہ_3 ہیں نقطہ و (غہ، عہ) پر ملیں تو ثابت کرو کہ اُس مثلث کے حائط دائرہ کا قطر جو ن، ق، ر پر کے مماسوں سے بنتا ہے س و کے مساوی ہوگا جہاں س مکافی کا ماسکہ ہے۔

نواں باب

درجۂ دوم کی عام مساوات

۱۶۶ — ہم ابواب ماسبق میں دیکھ چکے ہیں کہ کسی مخروطی کی مساوات ہمیشہ درجہ دوم کی ہوتی ہے، اب ہم ثابت کریں گے کہ درجہ دوم کی ہر مساوات ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے اور نیز معلوم کریں گے کہ کسی ایسی مساوات سے اس مخروطی کی نوعیت اور محل کس طرح متعین کئے جا سکتے ہیں جس کو وہ تعبیر کرتی ہے ۔

۱۶۷ — ثابت کرو کہ ہر منحنی جس کی مساوات دوسرے درجہ کی ہے ایک مخروطی ہے ۔

ہم محددوں کے محوروں کو قائم فرض کر سکتے ہیں کیونکہ اگر مساوات مائل محوروں کے حوالے سے دی گئی ہو اور اگر ہم قائم محوروں میں تبدیل کریں تو مساوات کا درجہ نہیں بدلتا [دفعہ ۵۳] ۔

پس فرض کرو کہ منحنی کی مساوات

$$ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ \quad ...(۱)$$

ہے ۔

چونکہ درجہ دوم کی مساوات کی یہ عام سے عام شکل ہے اس لئے اس میں تمام ممکنہ صورتیں شامل ہیں ۔

ہم رقم لا ما کو اس طرح خارج کر سکتے ہیں کہ محوروں کو ایک خاص زاویہ میں سے گھمایا جائے کیونکہ محوروں کو ایک زاویہ طہ میں سے گھمانے کے لیے ہمیں لا اور ما کی بجائے علی الترتیب

لا جم طہ ـ ما جب طہ اور لا جب طہ + ما جم طہ

درج کرنا ہوگا۔

چنانچہ مساوات (۱) ہو جائے گی (۲۲۷

ا (لا جم طہ ـ ما جب طہ)^2 + ۲ ھ (لا جم طہ ـ ما جب طہ) (لا جب طہ + ما جم طہ)

+ ب (لا جب طہ + ما جم طہ)^2 + ۲ گ (لا جم طہ ـ ما جب طہ)

+ ۲ ف (لا جب طہ + ما جم طہ) + ج = ۰، .... (۲)

(۲) میں لا ما کا سر

۲ (ب ـ ا) جب طہ جم طہ + ۲ ھ (جم^2 طہ ـ جب^2 طہ)

ہے اور یہ صفر ہوگا اگر

مس ۲ طہ = ۲ ھ / (ا ـ ب)، .... (۳)

چونکہ کسی ایسے زاویہ کو معلوم کیا جا سکتا ہے جس کا مماس کسی حقیقی مقدار کے مساوی ہے اس لیے زاویہ طہ = $\frac{1}{2}$ مس$^{-1}$ ۲ ھ / (ا ـ ب) تمام صورتوں میں حقیقی ہے۔

اب مساوات (۲) کو لکھا جا سکتا ہے

ا لا^2 + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰، ..... (۴)

اگر ا اور ب میں سے کوئی بھی صفر نہیں ہے تو ہم مساوات (۴) کو شکل

ا (لا + گ/ا)^2 + ب (ما + ف/ب)^2 = گ^2/ا + ف^2/ب ـ ج = ک

میں لکھ سکتے ہیں، یا مبدا کو نقطہ $\left(-\frac{\text{گ}}{\text{ا}}\text{، }-\frac{\text{ف}}{\text{ب}}\right)$ پر لینے سے

$$\text{ا لا}^2+\text{ب ما}^2=\text{ک}\text{،}\quad\ldots\ldots\ldots\;(\text{۵})$$

اگر مساوات (۵) کا بائیں جانبی رکن صفر ہو تو مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے گی [دفعہ ۳۵]۔

لیکن اگر مساوات (۵) کا بائیں جانبی رکن صفر نہ ہو تو ہمیں مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\frac{\text{ک}}{\text{ا}}}+\frac{\text{ما}^2}{\frac{\text{ک}}{\text{ب}}}=\text{۱}$$

حاصل ہوتی ہے اور ہم جانتے ہیں کہ یہ مساوات ایک ناقص کو تعبیر کرے گی اگر دونوں نسب نما مثبت ہوں اور ایک زائد کو تعبیر کرے گی اگر ایک نسب نما منفی اور دوسرا مثبت ہو۔

اگر دونوں نسب نما منفی ہوں تو یہ ظاہر ہے کہ لا اور ما کی کوئی حقیقی قیمتیں مساوات کو پورا نہیں کرینگی۔ اِس صورت میں منحنی ایک خیالی ناقص ہوتا ہے۔

(۲۲۸) پھر فرض کرو کہ ا یا ب صفر ہے، مثلاً فرض کرو ا صفر ہے۔ [ا اور ب دونوں بموجب دفعہ ۳۵ صفر نہیں ہو سکتے] تب مساوات (۴) لکھی جا سکتی ہے

$$\text{ب}\left(\text{ما}+\frac{\text{ف}}{\text{ب}}\right)^2=-\text{۲گ لا}-\text{ج}+\frac{\text{ف}^2}{\text{ب}}\text{،}\quad\ldots\ldots\;(\text{۶})$$

اگر گ = ۰ تو یہ مساوات متوازی خطوط کے ایک زوج کو تعبیر کرتی ہے جو منطبق ہونگے اگر گ = ۰ اور نیز $\text{ف}^2-\text{ب ج}=0$۔

اگر گ صفر نہیں ہے تو ہم مساوات کو لکھ سکتے ہیں

$$\left(\text{ما}+\frac{\text{ف}}{\text{ب}}\right)^2=-\frac{\text{۲گ}}{\text{ب}}\left(\text{لا}-\frac{\text{ف}^2}{\text{۲ب گ}}+\frac{\text{ج}}{\text{۲گ}}\right)$$

جو ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور محور لا کے متوازی ہے۔

پس تمام صورتوں میں وہ منحنی جو درجۂ دوم کی عام مساوات سے تعبیر ہوتا ہے مخروطی ہے۔

۱۶۸۔ ایک مخروطی کے مرکز کے محدد معلوم کرنا۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ جب محددوں کا مبدا، کسی مخروطی کا مرکز ہوتا ہے تو مخروطی کی مساوات میں وہ رقمیں شامل نہیں ہوتیں جن میں متغیروں کا درجہ پہلا ہوتا ہے پس مخروطی کا مرکز معلوم کرنے کے لیے مبدا، کو کسی نقطہ (لَا، مَا) پر تبدیل کرنا چاہیئے اور لَا، مَا کا ایسا انتخاب کرنا چاہیئے کہ استحالہ شدہ مساوات میں لا اور ما کے سر صفر ہو جائیں۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات

ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ہے۔

(لَا، مَا) میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے حوالے سے مساوات اس طرح حاصل کیجا سکتی ہے کہ لا کی بجائے لا + لَا اور ما کی بجائے ما + مَا درج کیا جائے چنانچہ استحالہ شدہ مساوات ہوگی

ا(لا + لَا)^2 + ۲ھ(لا + لَا)(ما + مَا) + ب(ما + مَا)^2 + ۲گ (لا + لَا)

+ ۲ف(ما + مَا) + ج = ۰

یا

ا لا^2 + ۲ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ لا(ا لَا + ھ مَا + گ) + ۲ ما(ھ لَا + ب مَا + ف)

+ ا لَا^2 + ۲ھ لَا مَا + ب مَا^2 + ۲گ لَا + ۲ف مَا + ج = ۰

اس مساوات میں لا اور ما دونوں کے سر صفر ہونگے اگر لَا اور مَا کو اسطرح

منتخب کیا جائے کہ

ا لاَ + ھ ماَ + گ = ۰، .... (۱)

اور ھ لاَ + ب ماَ + ف = ۰، .... (۲)

تب (لاَ، ماَ) کو مبدا، مانکر اس کے حوالے سے استحالہ شدہ مساوات (۲۲۹)

ا لا² + ب ما² + ۲ ھ لا ما + جَ = ۰، ...... (۳)

ہوگی جہاں

جَ = ا لاَ² + ۲ ھ لاَ ماَ + ب ماَ² + ۲ گ لاَ + ۲ ف ماَ + ج، .... (۴)

پس مخروطی کے مرکز کے محدد لاَ اور ماَ کی وہ قیمتیں ہیں جو مساواتوں (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتی ہیں۔

اِس لیے مرکز نقطہ

$$\left(\frac{\text{ھ ف - ب گ}}{\text{ا ب - ھ}^2} \text{ ، } \frac{\text{گ ھ - ا ف}}{\text{ا ب - ھ}^2} \right)$$

ہے۔

اگر ا ب - ھ² = ۰ تو مرکز کے محدد لامتناہی ہوتے ہیں اور اسلیے منحنی ایک مکافی ہوتا ہے [دفعہ ۱۵۸]

لیکن اگر ھ ف - ب گ = ۰ اور ا ب - ھ² = ۰ یعنی اگر

$$\frac{\text{ا}}{\text{ھ}} = \frac{\text{ھ}}{\text{ب}} = \frac{\text{گ}}{\text{ف}}$$

تو مساواتوں (۱) اور (۲) سے ایک ہی خطِ مستقیم تعبیر ہوتا ہے اور اس خط کا کوئی نقطہ مرکز ہے۔ اِس صورت میں طریق متوازی خطوں کا ایک زوج ہے۔

اوپر کی تحقیق میں محاور قائم یا مائل ہوسکتے ہیں۔

آئندہ وہ نتائج جو مائل محوروں کے لیے درست رہتے ہیں علامت (سہ) کے ذریعہ دکھائے جائیں گے۔

۱۶۹ — دفعہ ماسبق کی مساواتوں (۱) اور (۲) کو علی الترتیب لاَ اور ماَ

سے ضرب دو اور مجموعہ کو (۴) کے بائیں جانبی رکن سے تفریق کرو تو

$$\text{جَ} = \text{گ لاَ} + \text{ف ماَ} + \text{ج} \text{، } \quad \ldots\ldots (۵)$$

$$= \text{گ} \frac{\text{ھ ف} - \text{ب گ}}{\text{اب} - \text{ھ}^2} + \text{ف} \frac{\text{گ ھ} - \text{ا ف}}{\text{اب} - \text{ھ}^2} + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{اب ج} + ۲\,\text{ف گ ھ} - \text{ا ف}^2 - \text{ب گ}^2 - \text{ج ھ}^2}{\text{اب} - \text{ھ}^2} \text{، } \quad \ldots (۶)$$

یا مساواتوں (۱)، (۲) اور (۵) سے لاَ، ماَ کو ساقط کرنے پر فوراً حاصل ہوتا ہے

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} - \text{جَ} \end{vmatrix} = ۰ \quad \text{یعنی} \quad \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix} - \text{جَ}(\text{اب} - \text{ھ}^2) = ۰$$

(۲۳۰) ۱۷۰ ـــ جملہ $\text{اب ج} + ۲\,\text{ف گ ھ} - \text{ا ف}^2 - \text{ب گ}^2 - \text{ج ھ}^2$ کو بالعموم علامت Δ سے تعبیر کیا جاتا ہے اور اس کو

$$\text{ا لا}^2 + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 + ۲\,\text{گ لا} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج}$$

کا ممیز کہتے ہیں ۔

$\Delta = ۰$ سے وہ شرط حاصل ہوتی ہے کہ مخروطی دو خطوطِ مستقیم ہو سکے۔ کیونکہ اگر Δ صفر ہے تو جَ صفر ہے اور اس صورت میں دفعہ ۱۶۸ کی مساوات (۳) دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے گی ۔

یہ وہ شرط ہے جو ہم نے دفعہ ۳۷ میں معلوم کی تھی ۔

۱۷۱ ـــ اُس مخروطی کے محوروں کا محل اور مقدار معلوم کرنا جسکی مساوات $\text{ا لا}^2 + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 = ۱$ ہے ۔

اگر ایک مخروطی کسی ہم مرکز دائرہ سے منقطع ہو تو نقاطِ تقاطع میں گذرنے والے قطر مخروطی کے محوروں کے ساتھ مساوی المیلان ہوں گے اور وہ منطبق ہونگے اگر دائرہ کا نصف قطر مخروطی کے کسی ایک نیم محور کے مساوی ہو ۔

وہ خطوط جو مبدا میں سے اور مخروطی اور دائرہ کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرتے ہیں مساوات

$$\left(\text{ا}-\frac{1}{\text{ر}^2}\right)\text{لا}^2+2\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما}+\left(\text{ب}-\frac{1}{\text{ر}^2}\right)\text{ما}^2=0 \quad \ldots\ldots (1)$$

سے حاصل ہوتے ہیں اگر دائرہ کی مساوات $\text{لا}^2+\text{ما}^2=\text{ر}^2$ ہو۔

یہ خطوط منطبق ہونگے اگر

$$\left(\text{ا}-\frac{1}{\text{ر}^2}\right)\left(\text{ب}-\frac{1}{\text{ر}^2}\right)-\text{ھ}^2=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

اور اس صورت میں وہ مخروطی کے محوروں میں سے ایک یا دوسرے پر منطبق ہونگے۔

پس مخروطی کے نیم محوروں کے طول مساوات (۲) کی اصلیں ہیں یعنے مساوات

$$\frac{1}{\text{ر}^4}-(\text{ا}+\text{ب})\frac{1}{\text{ر}^2}+\text{اب}-\text{ھ}^2=0 \quad \ldots\ldots (3)$$

کی اصلیں ہیں۔

اب (۱) کو $\left(\text{ا}-\frac{1}{\text{ر}^2}\right)$ سے ضرب دو تب اگر $\frac{1}{\text{ر}^2}$ مساوات (۲) کی اصلوں میں سے کوئی ایک ہو تو

$$\left(\text{ا}-\frac{1}{\text{ر}^2}\right)^2\text{لا}^2+2\,\text{ھ}\left(\text{ا}-\frac{1}{\text{ر}^2}\right)\text{لا}\,\text{ما}+\text{ھ}^2\,\text{ما}^2=0$$

(۲۳۱) اس لیے $$\left(\text{ا}-\frac{1}{\text{ر}^2}\right)\text{لا}+\text{ھ}\,\text{ما}=0 \quad \ldots\ldots (4)$$

پس اگر ہم (۴) میں مساوات (۳) کی کوئی ایک اصل درج کریں تو متناظر محور کی مساوات حاصل ہوگی۔

اوپر کی تحقیق میں ہم نے محوروں کو قائم فرض کیا ہے۔ لیکن اگر محور زاویہ سہ پر مائل ہوں تو ہمیں قدرے ترمیم کرنی ہوگی کیونکہ نصف قطر ر کے دائرہ کی

مساوات لا² + ۲ لا ما جم سہ + ما² = ر² ہوگی ۔

۱۷۲ ۔ ایک مکافی کا محور اور وترِ خاص معلوم کرنا ۔

اگر مساوات

ا لا² + ۲ ﮦ لا ما + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ایک مکافی کو تعبیر کرے تو دوسرے درجہ کی ارقام کامل مربع ہونگی [دفعہ ۱۰۴] - اس لیے مساوات

(عہ لا + بہ ما)² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ...... (۱)

کے مماثل ہے جہاں عہ² = ا اور بہ² = ب ۔

(۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ خط عہ لا + بہ ما = ۰ پر عمود کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے خط ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ پر کا عمود ۔ اِن خطوط کا علی القوائم ہونا ضروری نہیں ہے لیکن ہم مساوات (۱) کو شکل

(عہ لا + بہ ما + لہ)² = ۲ لا (لہ عہ - گ) + ۲ ما (لہ ب - ف) + لہ² - ج

میں لکھ سکتے ہیں اور وہ دو خطوطِ مستقیم جن کی مساواتیں

عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ اور ۲ لا (لہ عہ - گ) + ۲ ما (لہ ب - ف) + لہ² - ج = ۰

ہیں علی القوائم ہونگے اگر

عہ (لہ عہ - گ) + بہ (لہ بہ - ف) = ۰

یا اگر لہ = (عہ گ + بہ ف) / (عہ² + بہ²)

اب

عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ اور ۲ (عہ لہ - گ) لا + ۲ (بہ لہ - ف) ما + لہ² - ج = ۰

کو علی الترتیب لا اور ما کے نئے محور قرار دو تو حاصل ہوگا

ما² = ۴ ع لا

اور ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک مکافی کی مساوات ہے جو اس کے محور اور راس پر کے مماس کے حوالے سے حاصل ہوتی ہے ۔

وترِ خاص معلوم کرنیکے لیے ہم مساوات کو شکل

(۲۳۲

$$\left(\frac{\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ}}{\sqrt{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2}}\right)^2 = \text{۴ع} \left\{ \frac{2(\text{عہ لہ} - \text{گ})\,\text{لا} + 2(\text{بہ لہ} - \text{ف})\,\text{ما} + \text{لہ}^2 - \text{ج}}{\sqrt{4(\text{عہ لہ} - \text{گ})^2 + 4(\text{بہ لہ} - \text{ف})^2}} \right\}$$

میں لکھتے ہیں، پس $\text{۴ع} = \dfrac{\sqrt{4(\text{عہ لہ} - \text{گ})^2 + 4(\text{بہ لہ} - \text{ف})^2}}{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2}$

اِس لیے (۱) مکافی ہے جس کا محور

$$\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ} = 0$$

ہے اور جس کا وترِ خاص

$$2\,\frac{\sqrt{(\text{عہ لہ} - \text{گ})^2 + (\text{بہ لہ} - \text{ف})^2}}{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2} = \frac{2(\text{عہ ف} - \text{بہ گ})}{(\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ہے کیونکہ $\text{لہ} = (\text{عہ گ} + \text{بہ ف}) \,/\, (\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2)$

۱۷۴ — اب ہم اُن مخروطیوں کا محل اور اِنکی نوعیت معلوم کریں گے جن کی مساواتیں حسب ذیل ہیں:

(۱) $7\,\text{لا}^2 - 17\,\text{لا ما} + 6\,\text{ما}^2 + 23\,\text{لا} - 2\,\text{ما} - 20 = 0$،

(۲) $\text{لا}^2 - 5\,\text{لا ما} + \text{ما}^2 + 8\,\text{لا} - 20\,\text{ما} + 15 = 0$،

(۳) $36\,\text{لا}^2 + 24\,\text{لا ما} + 29\,\text{ما}^2 - 72\,\text{لا} + 126\,\text{ما} + 81 = 0$،

(۴) $(5\,\text{لا} - 12\,\text{ما})^2 - 2\,\text{لا} - 29\,\text{ما} - 1 = 0$

(۱) مرکزوں کو معلوم کرنے کے لیے مساواتیں [دفعہ ۱۶۸ (۱)، (۲)]

$$14\,\overline{\text{لا}} - 17\,\overline{\text{ما}} + 23 = 0،$$

$$-17\,\overline{\text{لا}} + 12\,\overline{\text{ما}} - 2 = 0$$

ہیں — اِن سے $\overline{\text{لا}} = 2$ اور $\overline{\text{ما}} = 3$ — اِسلئے مرکز نقطہ (۲، ۳) ہے —
مرکز میں سے گذرنیوالے متوازی محوروں کے حوالے سے مساوات [دفعہ ۱۶۹]

$$7\,\text{لا}^2 - 17\,\text{لا ما} + 6\,\text{ما}^2 + \frac{23}{2} \times 2 - 1 \times 3 - 20 = 0$$